Le raisonnement par récurrence

L'objectif

On dispose d'une infinité de dominos possédant la propriété (P) d'être alignés et proches les uns des autres.
On veut démontrer que si le premier domino tombe alors tous les dominos tombent.

Le principe :

Initialisation : le 1[er] domino tombe
Hérédité : si un domino tombe alors d'après la propriété (P) le suivant tombe
Conclusion : tous les dominos tombent quel que soit leur nombre.

La rédaction :

Propriété (P) : pour tout entier naturel n, la distance entre le domino numéro n et le domino $n+1$ est strictement inférieure à la longueur d'un domino.	Cette propriété peut être donnée dans l'énoncé (définition ou question préalable) ou bien être démontrée dans l'étape "hérédité".
Hypothèse de récurrence au rang p notée HR(p) "le domino numéro p tombe"	Il s'agit d'une proposition logique à définir en fonction de la conclusion désirée à la fin de la démonstration. ⚠ ce n'est qu'une hypothèse !
Initialisation : le domino numéro 1 tombe. HR(1) est donc vraie.	Le rang initial est défini en fonction de la conclusion désirée.
Hérédité : soit p un entier naturel fixé, supposons HR(p) vraie Alors d'après la propriété (P), HR(p+1) est vraie	⚠ l'hypothèse est faite pour une valeur de p et pas pour tout entier p.
Conclusion : pour tout entier naturel n, HR(n) est vraie.	La conclusion s'applique à tous les entiers naturels n à partir du rang initial.

Des exemples

1) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, on a : $2^n \geqslant n^2$

2) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : pour tout réel $x > 0$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$

3) Démontrer que pour tout entier naturel n : $7^n - 1$ est un multiple de 63)

4) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$

5) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : pour tout réel x, $(x^n)'=nx^{n-1}$

6) Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+2n-11$. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n=n^2-12n$