Généralités sur les suites

Comportement global

(propriétés valables pour tout $n \in \mathbb{N}$)

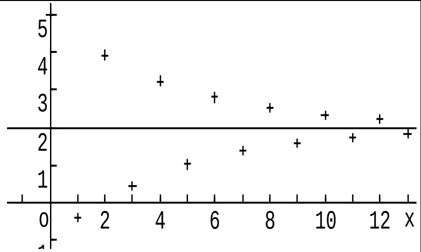
Suite minorée, majorée, bornée		Sens de variation
(u_n) est **minorée** signifie qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$ (u_n) est **majorée** signifie qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$ (u_n) est **bornée** signifie qu'elle est **majorée et minorée**. Exemples :	définitions	(u_n) est **croissante** signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (u_n) est dé**croissante** signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$ (u_n) est **constante** signifie que (u_n) est **croissante et décroissante** (u_n) est **monotone** signifie que (u_n) est **croissante ou décroissante** Exemples :
➢ par récurrence : exemple :montrer que (u_n) : $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$ et $u_0 = 1$ est minorée par 0 et majorée par 2 ➢ par encadrements successifs : exemple : montrer que (u_n) : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ est majorée par 1 et minorée par ➢ par étude de fonction : exemple : montrer que (u_n) : $u_n = -n^2 + 4n + 10$ est majorée par 14	méthodes	➢ Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ alors (u_n) est **croissante** Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ alors (u_n) est **décroissante** exemple : ➢ Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors (u_n) est **croissante** Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ alors (u_n) est **décroissante** exemple :
(u_n) n'est **pas minorée** signifie que pour tout $m \in \mathbb{R}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < m$ (u_n) n'est **pas majorée** signifie que pour tout $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M < u_n$ (u_n) n'est **pas bornée** si elle est **non-majorée ou non-minorée**. exemple :	négation	(u_n) n'est **pas monotone** signifie que (u_n) est **non-croissante et non-décroissante** exemple : les suite alternées (dont le signe est alternativement positif et négatif) sont non-monotones

Comportement asymptotique
(quand n tend vers l'infini)

Une suite est **convergente** si elle admet une **limite finie**. Une suite **non-convergente** est dite **divergente**.
☝Attention : une suite divergente peut avoir +∞ ou **-**∞ pour limite **ou bien** ne pas avoir de limite.
Exemples :

<table>
<tr><th>Suite convergente</th><th></th><th>Suite de limite infinie</th></tr>
<tr><td>

Soit *l* un réel.
La suite (u_n) **admet pour limite *l*** (ou **converge vers *l***) signifie que **tout intervalle ouvert centré en *l*** (du type $]l-a;l+a[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$



</td><td>définitions</td><td>

La suite (u_n) **admet pour limite** $+\infty$ signifie que **tout intervalle de la forme** $]a;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

La suite (u_n) **admet pour limite** $-\infty$ signifie que **tout intervalle de la forme** $]-\infty;a[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$

</td></tr>
<tr><td>

Toute suite convergente est bornée
Contraposée: Une suite non bornée n'est pas convergente.
Réciproque fausse: Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente.
Exemples :

</td><td>borne</td><td>

Une suite de limite infinie n'est pas bornée
Contraposée: Une suite bornée ne peut avoir une limite infinie
Réciproque fausse: Une suite non bornée n'a pas nécessairement une limite infinie
Exemples :

</td></tr>
<tr><td>

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergeant respectivement vers l et l'.
Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ alors $l \leq l'$
S'il existe un réel M tel que, à partir d'un certain rang, $u_n \leq M$ alors $l \leq M$
S'il existe un réel m tel que, à partir d'un certain rang, $l \leq u_n$ alors $m \leq l$

Théorème des gendarmes :
Soit (v_n) et (w_n) deux suites convergeant vers **une même limite *l***.
Si à partir d'un certain rang on a: $v_n \leq u_n \leq w_n$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$
exemple :

</td><td>comparaisons</td><td>

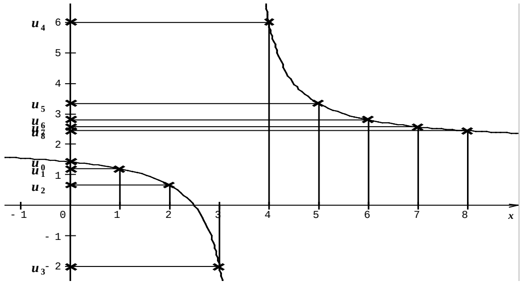
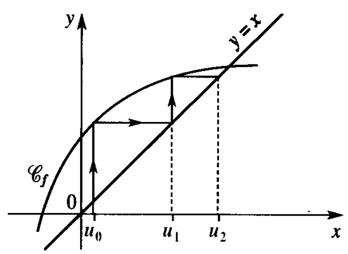
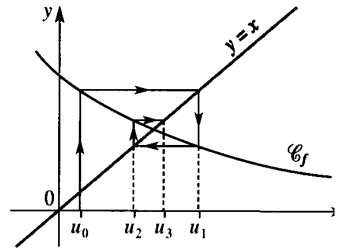
Soit (u_n) et (v_n) deux suites
Si à partir d'un certain rang $u_n \geq v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
exemples :

</td></tr>
</table>

Du global à l'asymptotique

<table>
<tr><td>Toute suite croissante majorée converge
Toute suite décroissante minorée converge</td><td>Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$
Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conclusion : une suite monotone admet toujours une limite (finie ou infinie)</td></tr>
</table>

Modes de génération d'une suite

Suite définie par une relation du type $\boxed{u_n = f(n)}$		Suite définie par une relation du type $\boxed{u_{n+1} = f(u_n)}$
(u_n) est alors définie **explicitement**. Exemple : $u_n = 2 + \dfrac{2}{n-3{,}5}$  A retenir : "Les propriétés de (u_n) découlent de celles de f"	définition	(u_n) est alors définie **par récurrence**. Exemples :   A retenir : " Les propriétés de (u_n) sont démontrées par l'étude de $f(x)-x$ ou par récurrence"
Si f admet un minimum m sur $\mathbb{R}^+$ alors (u_n) est minorée par m Si f admet un maximum M sur $\mathbb{R}^+$ alors (u_n) est majorée par M Exemple :	bornes	Si $u_0 \geq m$ et si pour tout $x \geq m$, $f(x) \geq m$ alors on montre par récurrence que (u_n) est minorée par m Si $u_0 \leq M$ et si pour tout $x \leq M$, $f(x) \leq M$ alors on montre par récurrence que (u_n) est majorée par M Exemple :
Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ alors (u_n) est croissante Si f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ alors (u_n) est décroissante Exemples :	sens de variations	Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq f(x)$ alors on montre en posant $x = u_n$ que (u_n) est croissante Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \geq f(x)$ alors on montre en posant $x = u_n$ que (u_n) est décroissante Exemple : Si $u_0 \leq u_1$ et si f est **croissante** sur $\mathbb{R}$ alors on montre par récurrence que (u_n) est croissante Si $u_0 \geq u_1$ et si f est **croissante** sur $\mathbb{R}$ alors on montre par récurrence que (u_n) est décroissante Remarque : Si f est décroissante (u_n) n'est pas monotone Exemple :
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ Exemples :	limites	**Théorème du point fixe** : si la suite (u_n) **converge vers le réel *l*** et si ***f* est continue en *l*** alors: ***f(l)=l*** Applications: 1) Soit (u_n) une suite convergente. Si l'équation $f(x) = x$ admet comme unique solution sur $\mathbb{R}$ le nombre réel l et si f est continue en l alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ Exemple : 2) Soit (u_n) une suite minorée par m et majorée par M. Si l'équation $f(x) = x$ admet comme unique solution sur $\mathbb{R}$ le nombre réel $x_0 \notin [m;M]$ et si f est continue en x_0 alors (u_n) n'est pas convergente. Exemple :