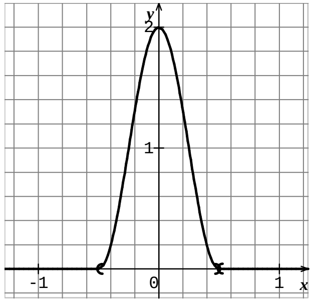
Variables aléatoires continues

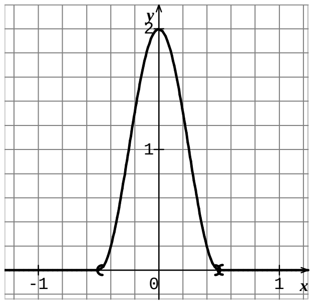
Définition : Lorsqu'à chaque événement élémentaire d'un univers Ω on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une <u>variable aléatoire</u> (réelle) notée X.
Définition : La variable aléatoire X est dite <u>continue</u> lorsque X peut décrire tout un intervalle. Soit $]a\,;b[$ un intervalle, l'événement : « $a<X<b$ » est alors l'ensemble des issues associées à un nombre de l'intervalle $]a\,;b[$
exemple : on lance une boule de bowling puis on mesure, en bout de piste, la position de la boule par rapport au milieu de la piste.
« -0,5<X<0,5 » : « X<-1 » = « 0<X<0,01 » :

Définition : On définit la <u>loi de probabilité continue de X</u> lorsque pour tout intervalle I on connaît la valeur de $P\left(X \in I\right)$

Propriété caractéristique : $P(X\in\mathbb{R})=1$ et pour tous intervalles I et J <u>disjoints</u> :
$$P\left(X \in I \cup J\right) = P\left(X \in I\right) + P\left(X \in J\right)$$

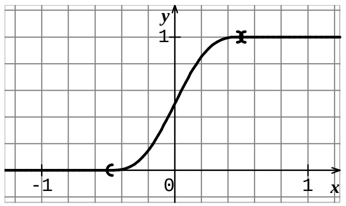


Définition : une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une <u>densité de probabilité</u> si et seulement si :
$$\boxed{\text{pour tout } x\in\mathbb{R},\ 0 \leqslant f(x) \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1}$$
Exemple : la fonction définie par :
$f(x) = \cos(2\pi x)+1$ si $x\in[-0,5\,;\,0,5]$
$f(x) = 0$ sinon



Propriété : si f est une densité de probabilité, <u>une loi de probabilité</u> est donnée par :
$$\boxed{P(a<X\leqslant b)=\int_a^b f(x)dx}\ .$$
Remarques : $P(X=a)=0$
$P(a<X<b) = P(a\leqslant X<b) = P(a<X\leqslant b) = P(a\leqslant X\leqslant b)$

Définition : X étant une variable aléatoire,
la fonction de répartition de X est
la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boxed{F(t) = P(X\leqslant t)}$
Exemple : pour la fonction f précédente :

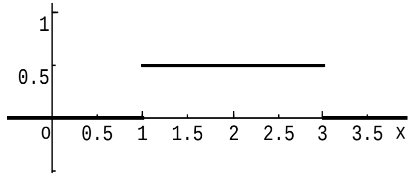


<u>Propriété</u> : si F est une fonction de répartition alors :
F est croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

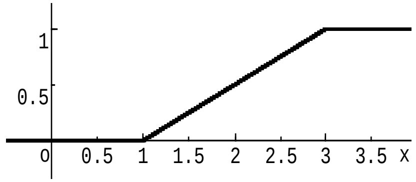
Deux lois de probabilité continues à connaître

Lois uniformes sur un intervalle

Soient m et M deux réels tels que $m<M$
<u>Définition</u>: une loi de probabilité est uniforme sur l'intervalle $[m;M]$ lorsque sa densité de probabilité est constante sur l'intervalle $[m;M]$ et nulle en dehors
<u>Propriété</u>: la densité de probabilité f d'une variable aléatoire suivant une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle $[m;M]$ est donnée par:
$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{M-m}\ si : m \leq x \leq M \\ 0\ si : x < m \text{ ou } M < x \end{cases}}$$

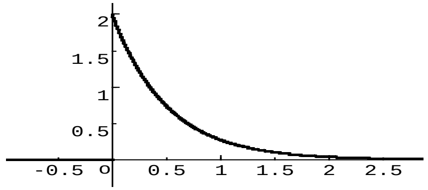


<u>Propriété</u>: la fonction de répartition F d'une variable aléatoire suivant une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle $[m;M]$ est donnée par:
$$\boxed{P\left(X \leq t\right) = F(t) = \begin{cases} 0\ si : t < m \\ \dfrac{t-m}{M-m}\ \ si : m \leq t \leq M \\ 1\ si : M < t \end{cases}}$$

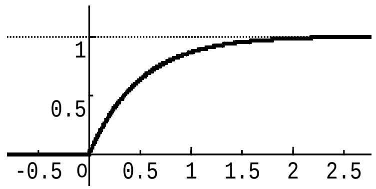


Lois exponentielles

Soit λ un réel strictement positif.
<u>Définition</u>: une loi de probabilité est exponentielle de paramètre λ lorsque sa densité est nulle sur $]-\infty;0[$ et proportionnelle à la fonction $x \mapsto e^{-\lambda x}$ sur $[0;+\infty[$
<u>Propriété</u>: la densité de probabilité f d'une variable aléatoire suivant une loi de probabilité exponentielle de paramètre λ est donnée par:
$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}\ si : 0 \leq x \\ 0\ \ si : x < 0 \end{cases}}$$



<u>Propriété</u>: la fonction de répartition F d'une variable aléatoire suivant une loi de probabilité exponentielle de paramètre λ est donnée par:
$$\boxed{P\left(X \leq t\right) = F(t) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda t}\ si : 0 \leq t \\ 0\ si : t < 0 \end{cases}}$$



<u>Propriété de la « demi-vie »</u> : soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ alors : $\boxed{P\left(X \leqslant \dfrac{\ln(2)}{\lambda}\right) = \dfrac{1}{2}}$

<u>Remarque : « loi de durée de vie sans vieillissement »</u> : soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ alors pour tous t_0 et h réels positifs :
$$\boxed{P_{t_0<X}\left(t_0 + h < X\right) = P\left(h < X\right)}$$