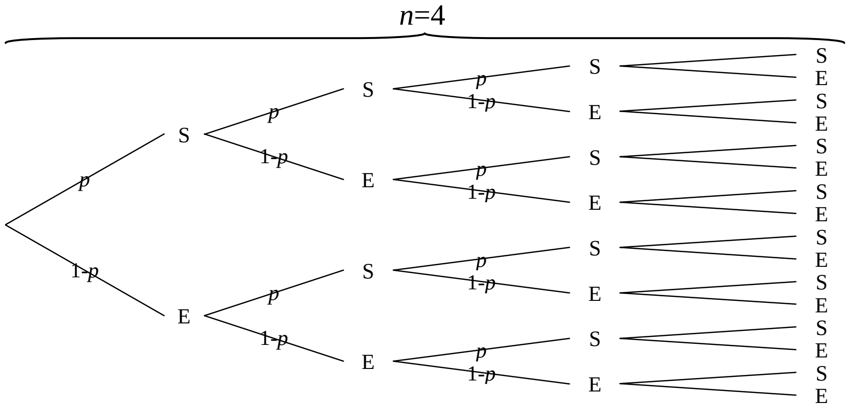
Loi Binomiale

<u>Définition</u> : une expérience qui ne comporte que deux issues possibles (succès ou échec) est une **épreuve de Bernoulli**. On appelle **schéma de Bernoulli** une expérience qui consiste à répéter **plusieurs fois et de manière indépendante** la même épreuve de Bernoulli.



<u>Définition</u> : soit X la variable aléatoire égale au **nombre de succès** dans un schéma de Bernoulli constitué de n épreuves et p la probabilité de succès pour une épreuve. On dit que X suit la **loi binomiale de paramètres *n* et *p*** notée : B(n,p)

<u>Théorème</u> : soit X une variable aléatoire suivant la loi B(n,p), alors pour tout k entier naturel tel que $k \leqslant n$:

$$\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$$

Exemple : si X suit une loi $B\left(5\ ;\ \frac{1}{3}\right)$ alors P(X=2)=…

<u>Théorème</u> : soit X une variable aléatoire suivant la loi B(n,p) alors on a :

$$\boxed{E(X)=np} \qquad \boxed{V(X)=np(1-p)}$$

<u>Théorème</u> : soit X une variable aléatoire suivant la loi B(n,p), et $Y=\frac{X}{n}$ mesurant la <u>fréquence des succès</u> alors on a :

$$\boxed{E(Y)=p} \qquad \boxed{V(Y)=\frac{p(1-p)}{n}}$$

Remarque : lors de n expériences, plus n est grand et plus la dispersion (autour de la valeur p) de la fréquence des succès diminue : les valeurs de la fréquence des succès ont de plus en plus de chance de se rapprocher de la probabilité de succès p.

De la fluctuation d'échantillonnage au test d'adéquation à une loi équirépartie.

I La pièce équilibrée

On lance n fois une pièce <u>équilibrée</u>. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus et Y la fréquence de piles sur les n lancers.

1) Donner la loi de probabilité de X

2) On pose $n=10$

a) Donner la loi de probabilité de Y

b) Calculer la probabilité de l'événement : $\left(\left|Y-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

3) Montrer que : $\left(\left|Y-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\left(\frac{n}{2}-\sqrt{n}\leq X\leq\frac{n}{2}+\sqrt{n}\right)$

4) Donner les valeurs de $P\left(\left|Y-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ à 10^{-3} près pour $n=25$, puis pour $n=100$.

<u>Fluctuation d'échantillonnage</u> : pour n "assez grand" dans plus de 95% des cas la fréquence observée appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{n}};\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ (intervalle de fluctuation de la fréquence)

II Une pièce à tester

On lance n fois une pièce qui est <u>peut-être truquée</u>. Soit p la probabilité d'obtenir pile à un lancer. On souhaite <u>tester l'hypothèse</u>: "$p=\frac{1}{2}$"

Soit f la fréquence de piles obtenues sur les n lancers. On mesure la "distance" entre la répartition observée et la répartition théorique par : $d_{obs}^2=\left(f-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-f-\frac{1}{2}\right)^2$

1) Démontrer que : $d_{obs}^2\leq\frac{2}{n}\Leftrightarrow\left|f-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{n}}$

2) On procède à 100 lancers et on obtient 61 piles.
Calculer d_{obs}^2. Que penser de l'hypothèse de départ? Quel risque-a-t-on de se tromper?

3) On procède à 100 lancers et on obtient 43 piles.
Calculer d_{obs}^2. Que penser de l'hypothèse de départ? Quel risque-a-t-on de se tromper?

Test d'hypothèse: pour n "assez grand"

- Si $d_{obs}^2>\frac{2}{n}$ alors on considère que la pièce est truquée avec un risque d'erreur inférieur à 5% (dans moins de 5% des cas une pièce équilibrée conduit à un écart aussi important)
- Si $d_{obs}^2\leq\frac{2}{n}$ alors on considère que la pièce n'est pas truquée (mais sans se prononcer sur le risque d'erreur que l'on ignore)