Analyse combinatoire

On considère un ensemble à n éléments.

<table>
<tr><td></td><td>Pas de répétition possible
(tirages sans remise)</td><td>Répétitions possibles
(tirages avec remise)</td></tr>
<tr><td>Permutations
Tous les éléments choisis sont connus, l'ordre compte</td><td>Permutations possibles dans une n_liste donnée:
$\boxed{n!}$
Exemple : nombre d'anagrammes du mot "BAC" : 3!</td><td>Permutations possibles dans une n_liste contenant k éléments différents, l'élément x_k étant répété n_k fois.
$(n=n_1+n_2+\ldots+n_k)$
$\boxed{\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}}$
Exemple : nombre d'anagrammes du mot "BACCALAUREAT" : $\frac{12!}{4!\,2!}$</td></tr>
<tr><td>Arrangements
Ordre compte
(tirages successifs)</td><td>Nombre de k_listes sans répétition pris dans un ensemble de n éléments :
$\boxed{A(n;k)=\frac{n!}{(n-k)!}}$
Exemple : nombre de mots de 3 lettres distinctes : $\frac{26!}{(26-3)!}$</td><td>Nombre de k_listes pris dans un ensemble de n éléments :
$\boxed{n^k}$
Exemple : nombre de "mots" de 3 lettres : 26^3</td></tr>
<tr><td>Combinaisons
L'ordre ne compte pas
(tirages simultanés)</td><td>Nombre de sous-ensembles à k éléments pris parmi un ensemble de n éléments:
$\boxed{C(n;k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}}$
Exemple : 5 lettres distinctes tirées simultanément dans un jeu de scrabble :
$C(26;5)=\frac{26!}{5!(26-5)!}$

Propriétés : $C(n;0)=C(n;n)=1$
$C(n:k)=C(n-1;k-1)+C(n-1;k)$
<table>
<tr><td>$\backslash k$
$n \backslash$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>6</td><td>4</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>1</td><td>5</td><td>10</td><td>10</td><td>5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6</td><td>1</td><td>6</td><td>15</td><td>20</td><td>15</td><td>6</td></tr>
</table></td><td>Nombre de n_uplets d'entiers naturels dont la somme vaut k (occurrences possibles de chaque élément de E)
$\boxed{\Gamma_n^k=C(n+k-1;k)=\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}}$
Démonstration (1)
Exemple : 5 lettres tirées simultanément dans un jeu de scrabble
$\Gamma_{26}^5=\frac{(26+5-1)!}{25!\,5!}$

Propriétés : $\Gamma_n^0=1$; $\Gamma_1^k=1$;
$\Gamma_n^k=\Gamma_n^{k-1}+\Gamma_{(n-1)}^k$
<table>
<tr><td>$\backslash k$
$n \backslash$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>6</td><td>10</td><td>15</td><td>21</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>10</td><td>20</td><td>35</td><td>56</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1</td><td>5</td><td>15</td><td>35</td><td>70</td><td>126</td></tr>
<tr><td>6</td><td>1</td><td>6</td><td>21</td><td>56</td><td>126</td><td>252</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

(1) On peut considérer les sous-ensembles pris parmi l'ensemble E ' = E ∪ {1;2;...;k-1}, en utilisant l'application suivante :

- L'ordre ne comptant pas, les termes peuvent être rangés dans un ordre croissant prédéfini sur l'ensemble de départ E.
- Les entiers de 1 à k-1 permettent de connaître les éléments répetés : l'entier i signifie "l'élément à la i-ième place est répété à la i+1-ième place"

Exemple : A;A;A;B;C;C correspond à l'ensemble {A;B;C;1;2;5}