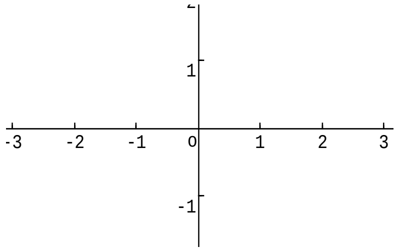
Continuité

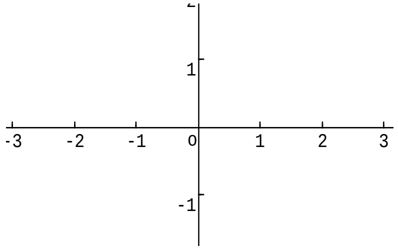
1. Définitions

une fonction *f* définie sur un **intervalle ouvert** *I* est **continue** en $a \in I$ si:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$



Une fonction *f* définie sur un **intervalle ouvert *I*** est **continue sur *I*** si *f* est continue en tout réel de *I*



Une fonction *f* définie sur [a ;b] est **continue sur [a ;b]** si :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur }]a;b[\\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a) \text{ et } \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = f(b) \end{cases}$$

Remarque : une fonction est continue **sur un intervalle** si on peut tracer sa représentation graphique "sans lever le crayon".

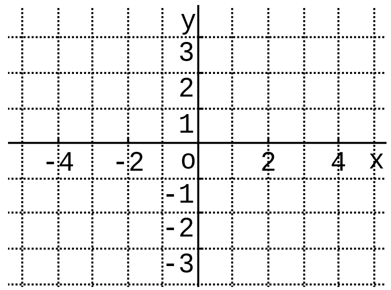
Exemples : La fonction carré est continue en 3 car : $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 3^2$

La fonction carré est continue en *a* pour tout $a \in \mathbb{R}$ donc la fonction carré est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction racine est continue sur $\mathbb{R}^+$ car elle est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$

Contre-exemple : la fonction partie entière, notée E, est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$E(x) = n$ si $x \in [\, n \,;\, n+1 \,[$ avec $n \in \mathbb{Z}$



Remarque : si $x > 0$ alors $E(x)$ est la troncature à l'unité de l'écriture décimale de *x*.

La fonction E n'est pas continue en 2 car : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} E(x) = 1 \neq E(2)$

Si I est un intervalle ouvert contenant au moins un entier relatif alors la fonction E **n'est pas continue** sur I.

2. Opérations et composition

Théorème : soit $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont continues sur les intervalles de leurs ensembles de définition.

Théorème : Soient *u* et *v* deux fonctions continues sur un intervalle *I* alors :

$u + v$ est continue sur I

$u \times v$ est continue sur I

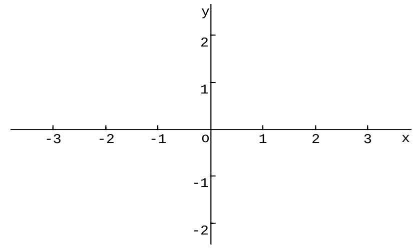
$\dfrac{u}{v}$ est continue sur les intervalles de son ensemble de définition (c'est-à-dire quand $v(x) \neq 0$)

Corollaire : toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
Toute fraction rationnelle est continue sur les intervalles de son ensemble de définition.

Théorème : Soient *u* et *v* deux fonctions définies et continues respectivement sur des intervalles *I* et *J* tels que $\forall x \in I, u(x) \in J$ alors $v \circ u$ est continue sur *I*

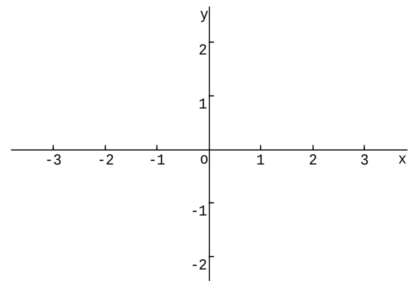
3. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème d'existence :
Si *f* est une fonction **continue** sur un intervalle *I* de bornes *a* et *b* alors,
pour tout réel ***k* compris entre *f(a)* et *f(b)***
il existe un réel ***c* compris entre *a* et *b***
tel que $f(c) = k$



Théorème d'existence et d'<u>unicité</u> :
Si *f* est une fonction **continue et <u>strictement monotone</u>** sur un intervalle *I* de bornes *a* et *b* ($a < b$) alors :

- **L'ensemble des images** *f(x)* avec *x* appartenant à ***I* est un intervalle *J*** de bornes $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)$



- Pour tout réel *k* de *J*, il existe un **<u>unique</u> réel *c* de *I*** tel que $f(c) = k$.

Applications :

- *f* est continue et strictement décroissante sur [1;3]
- *f*(1) = 6 et *f*(3) = 4

Alors l'ensemble des images *f*(*x*) avec $x \in [1;3]$ est l'intervalle [4;6]

- *f* est continue et strictement décroissante sur [1;3]
- *f*(1) = 6 et *f*(3) = 4

Or $5 \in [4;6]$
Donc l'équation *f(x)*=5 admet une unique solution dans [1;3]