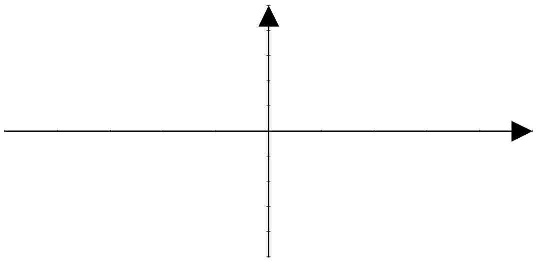
Limites et fonctions auxiliaires

Comparaisons

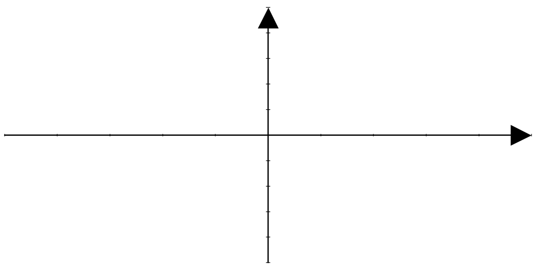
Soit *f* une fonction numérique définie sur *D* et α représentant ou bien nombre réel ou bien +∞ ou bien –∞. On considère une fonction auxiliaire *g* définie sur *D* et dont on connaît la limite en α.

$$\boxed{\text{Si } \left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = -\infty \\ \text{pour tout } x \in D, f(x) \leq g(x)\end{array}\right\} \text{ alors } \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty}$$



On dit que la fonction *f* est <u>majorée</u> par la fonction *g* sur l'ensemble D.

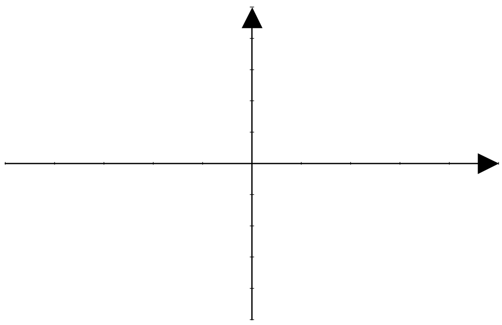
$$\boxed{\text{Si } \left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty \\ \text{pour tout } x \in D, g(x) \leq f(x)\end{array}\right\} \text{ alors } \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty}$$



On dit que la fonction *f* est <u>minorée</u> par la fonction *g* sur l'ensemble D.

Théorème des gendarmes pour les fonctions :
On considère deux fonctions auxiliaires *g* et *h* définies sur *D* et qui ont la même limite *l* (nombre réel) en α.

$$\boxed{\text{Si } \left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = l \\ \text{pour tout } x \in D, g(x) \leq f(x) \leq h(x)\end{array}\right\} \text{ alors } \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l}$$



☝ $|f(x) - L| \leq u(x)$ est équivalent à $-u(x) \leq f(x) - L \leq u(x)$

Composition

Définition : Soient *f* et *g* deux fonctions numériques définies respectivement sur D_f et D_g. Si pour tout $x \in D_f$ on a $f(x) \in D_g$ alors la fonction composée de *f* suivie de *g* est notée $g \circ f$ et définie sur D_f par $g \circ f(x) = g(f(x))$

Propriété : Soient *f* et *g* deux fonctions et α, β et γ désignant ou bien $-\infty$ ou bien un nombre réel ou bien $+\infty$.

$$\boxed{\text{Si } \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta \\ \lim\limits_{X\to\beta} g(X) = \gamma\end{array}\right\} \text{ alors } \lim\limits_{x\to\alpha} g \circ f(x) = \gamma}$$

☝Avec des abus de notations manifestes on peut retenir : $\lim\limits_{x\to\alpha} g \circ f(x) = \lim\limits_{X \to \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)} g(X)$ ou encore $\alpha \xrightarrow{f} \beta \xrightarrow{g} \gamma$

Exemple :

Autres méthodes

Lorsque les résultats précédents ne permettent pas de conclure, modifier l'expression de la fonction peut permettre de lever l'indétermination. On peut essayer de :

- quand *x* tend vers l'infini, mettre en facteur le terme dominant
- quand *x* tend vers *a*, mettre (*x*-*a*) en facteur
- utiliser la quantité conjuguée
- mettre en évidence le taux d'accroissement d'une fonction auxiliaire (la limite est alors la dérivée de cette fonction)
- …