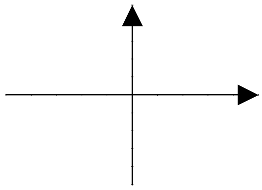
Les limites (rappels)

Soit f une fonction numérique et α désignant **ou bien un nombre réel ou bien $-\infty$ ou bien $+\infty$**

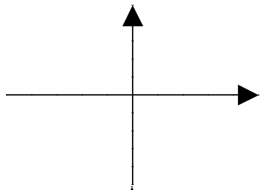
I) Définitions

La limite de f en α est $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]M;+\infty[$ contient tous les réels $f(x)$ dés que les réels x sont suffisamment proche de α. On note alors : $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty$



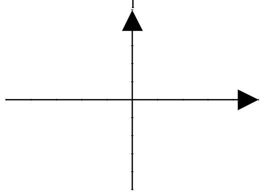
☝ On peut choisir M aussi grand que l'on veut, on trouvera toujours un voisinage I de α tel que : $\forall x\in I,\ f(x)\in\ ]M;+\infty[$

La limite de f en α est un réel l si tout intervalle de la forme $]l-r;l+r[$ (avec $r>0$) contient tous les réels $f(x)$ dés que les réels x sont suffisamment proche de α. On note alors : $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=l$



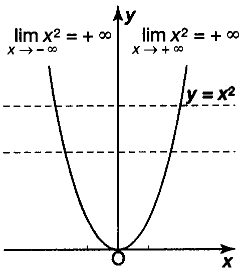
☝ On peut choisir $r>0$ aussi proche de zéro que l'on veut, on trouvera toujours un voisinage I de α tel que : $\forall x\in I,\ f(x)\in\ ]l-r;l+r[$

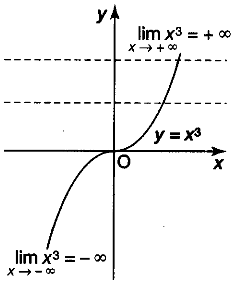
La limite de f en α est $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty;M[$ contient tous les réels $f(x)$ dés que les réels x sont suffisamment proche de α. On note alors : $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=-\infty$

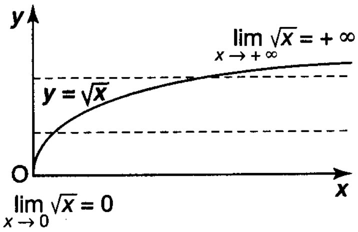


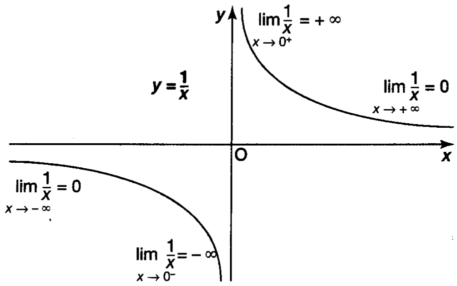
☝ On peut choisir M aussi petit que l'on veut, on trouvera toujours un voisinage I de α tel que : $\forall x\in I,\ f(x)\in\ ]-\infty;M[$

II) Limites de fonctions usuelles

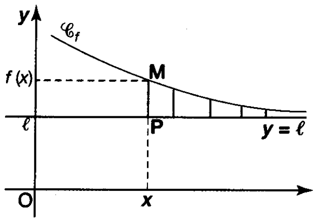






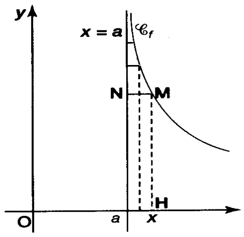


III) Asymptotes



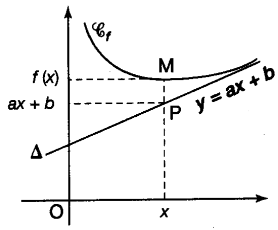
Soit l un nombre réel.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ alors la droite d'équation $y=l$ est l'asymptote horizontale à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$



Soit a un nombre réel.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ alors la droite d'équation $x=a$ est l'asymptote verticale à la courbe C_f au voisinage de a.



Soit Δ la droite d'équation $y=ax+b$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ alors Δ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$

Remarque : étudier la position relative de C_f par rapport à une asymptote signifie démontrer si la courbe est au-dessus ou au dessous de la droite.

IV) Opérations sur les limites

Somme

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x)=$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Produit

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	l	$l\neq0$	∞	0
Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=$	l'	∞	∞	∞
Alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)=$	$l\times l'$	∞	∞	?

Quotient

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	l	$l\neq0$	l	∞	∞	0
Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=$	$l'\neq0$	0	∞	l'	∞	0
Alors $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}=$	$\dfrac{l}{l'}$	∞	0	∞	?	?

☝ On peut retenir les cas des formes indéterminées avec les notations "abusives" suivantes : $+\infty-\infty=?$; $0\times\infty=?$; $\dfrac{\infty}{\infty}=?$; $\dfrac{0}{0}=?$

Pour lever l'indétermination dans certains cas particuliers :

La limite **<u>d'un polynôme</u>** en $-\infty$ ou $+\infty$ est la limite de son monôme de plus haut degré.

$$\lim_{x\to\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x+a_0)=\lim_{x\to\infty}a_nx^n \quad (\text{avec } a_n\neq0)$$

La limite **<u>d'une fraction rationnelle</u>** en $-\infty$ ou $+\infty$ est la limite du quotient de ses monômes de plus haut degré.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+....+a_0}{b_px^p+....+b_0}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_px^p} \quad (\text{avec } a_n\neq0 \text{ et } b_p\neq0)$$