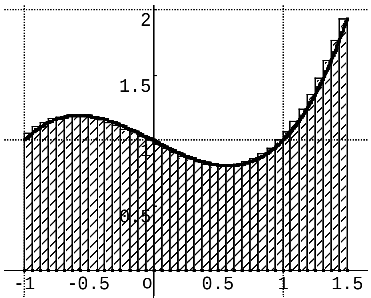
Intégrales

On considère une fonction f continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I avec $a<b$

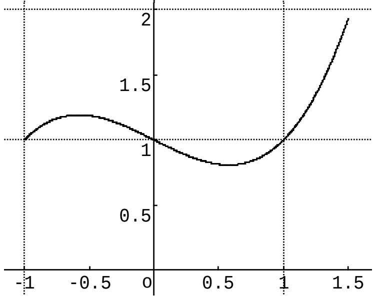
I Définition



Théorème : la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{k}{n}\right)\times\frac{b-a}{n}$ est convergente.

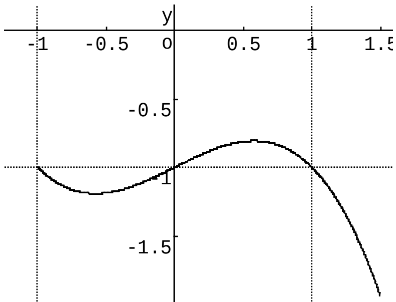
Définition : la limite de la suite (S_n) est **l'intégrale de *f* de *a* à *b***, elle est notée:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



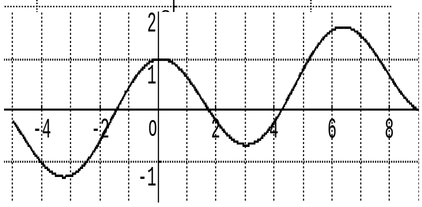
Si f est **positive** alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est **l'aire** du domaine défini par :

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$$



Si f est **négative** alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est **l'opposée de l'aire** du domaine défini par:

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ f(x) \le y \le 0 \end{cases}$$



Si f est de signe quelconque alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est la somme des aires algébriques des domaines définis à partir des intervalles sur lesquels $f(x)$ garde un signe constant.

II Calcul d'intégrales

Théorème : la fonction F définie sur I par: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est **une primitive de *f***.

Corollaire: soit F une primitive de f sur I, alors : $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$

Remarques: la valeur de $\int_a^b f(x)\,dx$ ne dépend pas de la primitive choisie pour le calcul.

on peut noter $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

Exemple : $\int_2^3 x^2 dx = \ldots$

Conséquence: la primitive de f sur I s'annulant en a est donnée par : $\boxed{x \mapsto \int_a^x f(t)dt}$

Exemple : $\int_2^x t^2 dt = \ldots$

Théorème (intégration par partie): Soit u et v deux fonctions dérivables à dérivées continues sur un intervalle I, alors :

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx}$$

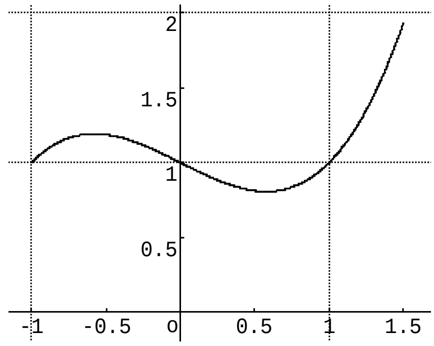
Exemple : $\int_0^{\pi} x\cos(x)dx = \ldots$

Définition : Si la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une limite finie alors:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,dt} \qquad \boxed{\int_{-\infty}^a f(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\,dt} \qquad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\,dt + \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,dt}$$

Exemples : $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt = \ldots$ $\qquad$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt = \ldots$

III Opérations sur les bornes



$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx} \qquad \boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

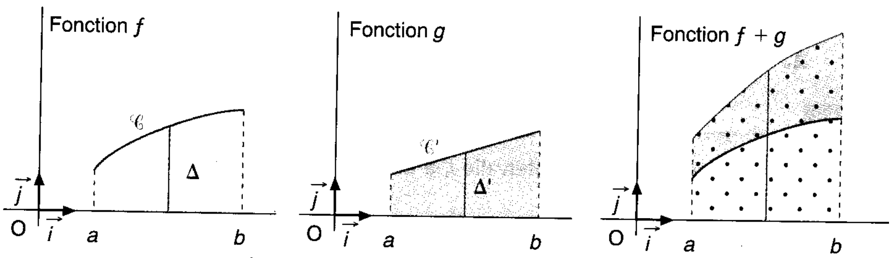
$$\boxed{\textbf{Relation de Chasles} : \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

Exemples : $\int_3^2 x^2dx = \ldots$ $\qquad$ $\int_3^3 x^2dx = \ldots$ $\qquad$ $\int_1^3 E(x)dx = \ldots$

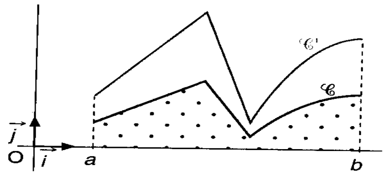
IV Opérations sur les fonctions

1) **linéarité de l'intégrale**

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$



soit $k\in\mathbb{R}$, $\int_a^b k\times f(x)\,dx = k\times\int_a^b f(x)\,dx$



(k=2)

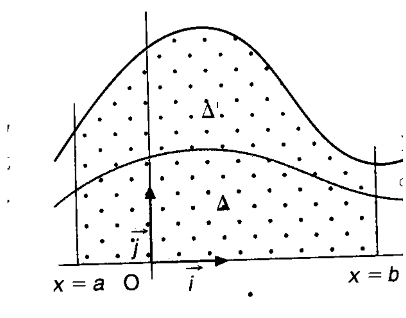
Exemples : $\int_1^3 \frac{1}{x(x+1)}dx = \ldots$ $\qquad$ $\int_1^3 -5x^2dx = \ldots$

2) **ordre**

Positivité de l'intégrale :

si $\begin{cases} a < b \\ f(x) > 0 \text{ pour tout } x\in[a;b] \end{cases}$ alors $\int_a^b f(x)\,dx > 0$

si $\begin{cases} a < b \\ f(x) < 0 \text{ pour tout } x\in[a;b] \end{cases}$ alors $\int_a^b f(x)\,dx < 0$

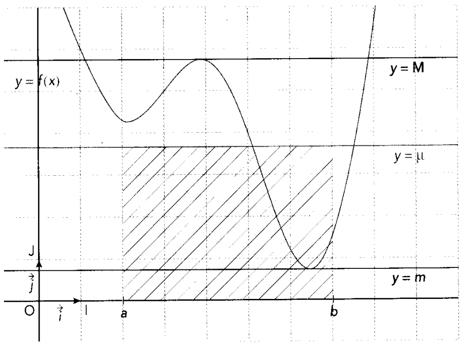


Croissance de l'intégrale :

si $\begin{cases} a < b \\ f(x) > g(x) \text{ pour tout } x\in[a;b] \end{cases}$ alors $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$

Exemples : $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2+1}dx \ldots 0$ car... $\qquad$ $\int_1^3 \frac{1}{x^2+1}dx \ldots \int_1^3 \frac{1}{x^2}dx$ car ...

V Applications



La **valeur moyenne de *f* sur [*a*;*b*]** est : $\boxed{\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}$

Inégalité de la moyenne :

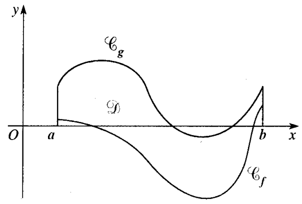
si pour tout *x* de [*a*;*b*], $m \le f(x) \le M$ alors $\boxed{m(b-a) \le \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)}$

si pour tout *x* de [*a*;*b*], $|f(x)| \le M$ alors $\boxed{\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\right| \le M|b-a|}$

Exemples : la valeur moyenne de sin sur [0 ; π] est …

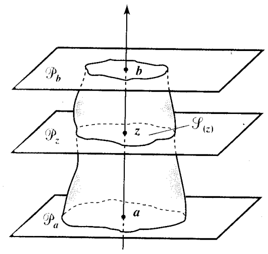
$$\ldots \le \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x\,dx \le \ldots$$

Calcul d'aire:



Lorsque $f(x) \le g(x)$ sur l'intervalle [a;b], l'aire du domaine limité par les courbes représentatives de *f* et *g* est donnée par $\boxed{\text{aire(D)}= \displaystyle\int_a^b g(x) - f(x)\,dx}$

Calcul de volume dans un repère orthonormal:



On considère le solide limité par les plans parallèles d'équation : *z*=*a* et *z*=*b*
On note P_z le plan perpendiculaire à (*oz*) de cote *z*
S(z) est l'aire de la section du solide par P_z

Alors le volume du solide est donné par : $\boxed{V = \displaystyle\int_a^b S(z)\,dz}$

Exemples : l'aire entre la parabole d'équation $y = x^2$ et la courbe d'équation $y = x^3$ pour *x* compris entre 0 et 1 est :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ on considère le cône de sommet O, d'axe (Oz) d'angle $\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'axe et compris entre les plans d'équation *z*=0 et *z*=4. Calculer son volume.

Récapitulatif des formules pour les primitives: soit *u* une fonction dérivable (ce tableau n'est pas exhaustif)

	forme de *f*	condition d'existence	*F* primitive de *f*
composée	$u'\times e^u$		
	$u'\times\sin(u)$		
	$u'\times\cos(u)$		
quotient	$\dfrac{u'}{u^\alpha}$ avec $\alpha \ne 1$		
	$\dfrac{u'}{u}$		
	$\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$		
produit	$u'\times u^\alpha$ avec $\alpha \ne -1$		
	$u'\times u$		
	$u'\times v$		