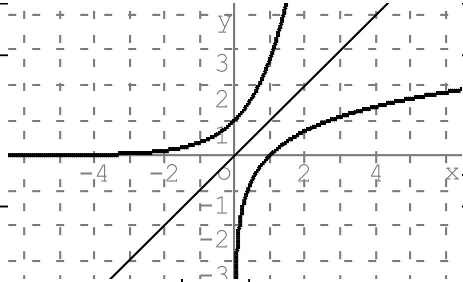
La fonction exponentielle



<u>Définition</u> : La fonction **exponentielle,** notée **exp,** est l'unique solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ avec condition initiale $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

<u>Théorème</u> : pour tous réels a et b on a : $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$
<u>Théorème</u> : la fonction exponentielle est l'<u>unique</u> fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tous réels a et b : $f(0) = f'(0) = 1$ et $f(a+b) = f(a) \times f(b)$
<u>Corollaire:</u> pour tout entier naturel n et pour tout réel x : $\exp(n \times x) = (\exp(x))^n$

On note e le nombre réel image de 1 par la fonction exponentielle : $e = \exp(1)$
On a alors pour tout n entier relatif, $\exp(n) = \exp(1 \times n) = (\exp(1))^n = \mathrm{e}^n$
On écrit, par extension, pour tout x réel : $\exp(x) = \mathrm{e}^x$

<u>Théorème</u> : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$: $\boxed{\mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b}}$
On peut retenir : « l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles »

$\boxed{\mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a}}$ $\boxed{\mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}}$ $\boxed{\mathrm{e}^{n \times a} = (\mathrm{e}^a)^n}$ $\boxed{\mathrm{e}^{\frac{a}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}^a}}$

Toutes ces opérations sont en accord avec les manipulations classiques d'exposants.

Propriété : la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x}$
Conséquence : pour les réels x proches de 0, on a : $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$
Corollaire : soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: : $\boxed{(\mathrm{e}^{u(x)})' = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}}$

<u>Théorème</u> : pour tout réel x, $\boxed{\exp(x) > 0}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x) = \exp(x)$		+	
exp	0	↗ 1	$+\infty$

<u>Conséquences</u> : la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels: $\boxed{\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a = b}$ et $\boxed{\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a < b}$

<u>Croissances comparées</u> : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x \times \mathrm{e}^x = 0^-$
"A l'infini, l'exponentielle est prépondérante sur x ."

La fonction logarithme népérien

Définition : La fonction **logarithme népérien,** notée **ln,** est la fonction qui à tout $x \in]0\,;+\infty[$ fait correspondre l'antécédent de x par la fonction exp.

Propriétés algébriques

Théorème : $\boxed{\ln(x) = y \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^y}$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\ln(\mathrm{e}^x) = x}$ | pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\boxed{\mathrm{e}^{\ln(x)} = x}$

Conséquences : ln(1)=0 et ln(e)=1

Théorème : Soient $a \in]0\,;+\infty[$ et $b \in]0\,;+\infty[$: $\boxed{\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)}$
On peut retenir : « le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes »

$\boxed{\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)}$ $\boxed{\ln(a^n) = n \times \ln(a)}$

$\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)}$ $\boxed{\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \times \ln(a)}$

Dérivées

Propriété : ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$: pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\boxed{(\ln(x))' = \frac{1}{x}}$
Conséquence : pour les réels x proches de 0, on a : $\ln(1+x) \approx x$
Corollaire : soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$ alors : pour tout $x \in I$, $\boxed{(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}}$

Propriétés analytiques

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$		+	
ln	$-\infty$	↗ 0	$+\infty$

<u>Conséquences</u> : ln est sctrictement croissante sur]0;+ ∞ [. Soient a et b réels strictement positifs : $\boxed{\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow 0 < a = b}$ et $\boxed{\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow 0 < a < b}$

<u>Croissances comparées</u> : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \times \ln(x) = 0^-$.
"A l'infini, x est prépondérant sur ln(x)."