Puissance d'exposant réel

Soit a un réel <u>strictement positif</u>, alors pour tout entier n on a: $a^n = \left(e^{\ln a}\right)^n = e^{n \times \ln a}$ Grâce à cette remarque on peut définir les puissances de a d'exposant **réel b**.

Définition: soit b un réel et a un réel strictement positif. Le réel a^b est donné par: $\boxed{a^b = e^{b \ln a}}$

Propriétés :

$a^0 = 1$ $\quad$ $1^b = 1$ $\quad$ $\ln\left(a^b\right) = b \ln(a)$ $\quad$ | $\quad$ $a^{b+b'} = a^b \times a^{b'}$ $\quad$ $a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}$ $\quad$ $a^{b-b'} = \dfrac{a^b}{a^{b'}}$ $\quad$ | $\quad$ $(aa')^b = a^b a'^b$ $\quad$ $\left(a^b\right)^{b'} = a^{bb'}$

Exponentielle de base *a*

Définition: soit a un réel strictement positif.. La fonction exponentielle de base a, notée $\exp_a$, est définie sur $\mathbb{R}$ par: $\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$

Remarque: $\exp_a$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0;+\infty[$

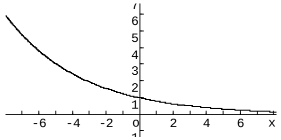
Théorème : $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel on a:

$$\exp_a'(x) = \ln(a) \times \exp_a(x) \text{ ou } \boxed{\left(a^x\right)' = \ln(a) \times a^x}$$

si 0<*a*<1

x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp_a'(x)$		-	
$\exp_a$	$+\infty$	↘	0

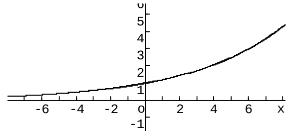
exemple : $x \mapsto 0,8^x$



si 1<*a*

x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp_a'(x)$		+	
$\exp_a$	0	↗	$+\infty$

exemple : $x \mapsto 1,2^x$



Fonction logarithme de base *a* (réciproque de l'exponentielle de base *a*)

Théorème: soit a un nombre réel **strictement positif différent de 1** et y_0 un réel strictement positif. Alors y_0 admet un **unique antécédent positif** x_0 par $x \mapsto a^x$.

Définition: Soit a un réel **strictement positif différent de 1**. On appelle **logarithme de base *a*** la fonction notée $\log_a$ définie sur $]0;+\infty[$ par: $\boxed{\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}}$

Remarque: On appelle **logarithme décimal, noté log,** le logarithme de base 10.

Propriétés: Soient $b \in \left]0;+\infty\right[$ et $c \in \left]0;+\infty\right[$: $\log_a(b \times c) = \log_a(b) + \log_a(c)$

$$\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a(b) \qquad \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c) \qquad \log_a\left(b^n\right) = n \times \log_a(b)$$

si 0<*a*<1

x	0		$+\infty$
$\log_a$	$+\infty$	↘	$-\infty$

si 1<*a*

x	0		$+\infty$
$\log_a$	$-\infty$	↗	$+\infty$

Propriétés : $\log(10) = 1$ et pour tout entier n on a $\log\left(10^n\right) = n$

Fonction puissance *b*

Définition: soit b un réel, la fonction puissance b, est définie sur $]0;+\infty[$ par: $x^b = e^{b \ln x}$

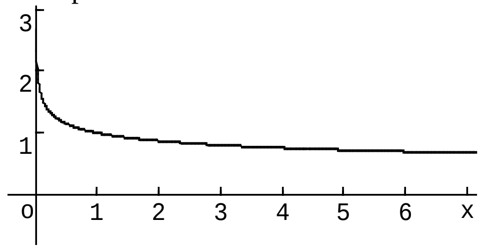
Remarque: La fonction puissance b est continue sur $]0;+\infty[$ et à valeurs dans $]0;+\infty[$

Théorème : La fonction puissance b est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout x réel strictement positif on a: $\boxed{\left(x^b\right)' = bx^{b-1}}$

si *b*<0

x	0		$+\infty$
$\left(x^b\right)'$		-	
$x \mapsto x^b$	$+\infty$	↘	0

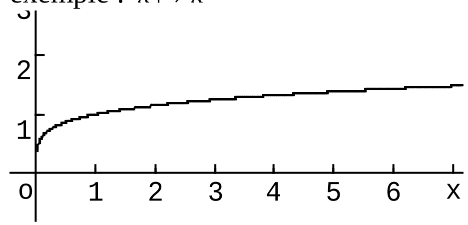
exemple : $x \mapsto x^{-0,2}$



si 0<*b*

x	0		$+\infty$
$\left(x^b\right)'$		+	
$x \mapsto x^b$	0	↗	$+\infty$

exemple : $x \mapsto x^{0,2}$



Fonction racine *n*-ième (réciproque de la fonction puissance *n*)

Théorème: soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et y_0 un réel positif. Alors y_0 admet un **unique antécédent positif** x_0 par la fonction $x \mapsto x^n$.

Remarque: si n est pair il existe aussi un antécédent négatif : $-x_0$

Définitions: x_0 est noté $\sqrt[n]{y_0}$ et se lit **racine *n*-ième** de y_0. La fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est appelée **fonction racine *n*-ième**

Théorème: pour tout réel $x \in \mathbb{R}^+$ et tout entier n supérieur ou égal à 2: $\boxed{\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}}$

Théorème: la fonction racine n-ième est continue sur $\mathbb{R}^+$,dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$: $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}}$

x	0		$+\infty$
$x \mapsto \sqrt[n]{x}$	0	↗	$+\infty$