Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Soit un nombre réel a et la fonction f_a telle que pour tout réel x ,

$$f_a(x)=\exp(x)\times\exp(a)$$

I. Conjecture

Compléter les tableaux de valeurs suivants :

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2
$f_1(x)$									
$\exp(x)$									

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2
$f_{0,5}(x)$									
$\exp(x)$									

Conjecturer une expression de $f_a(x)$ comme image d'un réel par la fonction exp.

II. Démonstration

Prérequis : 1) la fonction exp ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ et exp(0)=1 (cf intro)
2) formules de dérivées
3) si pour tout réel x , $f'(x)=0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$

Soit un réel a et h_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(x)=\dfrac{\exp(a)\times\exp(x)}{\exp(a+x)}$

1) Démontrer que pour tout réel x , $h_a(x)=1$
2) Conclure.
3) Cette relation dépend-elle de la valeur a choisie au départ?

III. Conséquences

1) Calculer l'expression $\exp(a)\times\exp(-a)$.
En déduire $\exp(-a)$ en fonction de $\exp(a)$.
En déduire l'expression de $\exp(a-b)$ en fonction de $\exp(a)$ et de $\exp(b)$.

2) Exprimer $\exp(2a)$ en fonction de $\exp(a)$.
Exprimer $\exp(3a)$ en fonction de $\exp(a)$.
Conjecturer l'expression pour n $\mathbb{N}$, de $\exp(n\times a)$ en fonction de $\exp(a)$.
Démontrer cette conjecture par récurrence.

Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Soit un nombre réel a et la fonction f_a telle que pour tout réel x ,

$$f_a(x)=\exp(x)\times\exp(a)$$

I. Conjecture

Compléter les tableaux de valeurs suivants :

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2
$f_1(x)$									
$\exp(x)$									

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2
$f_{0,5}(x)$									
$\exp(x)$									

Conjecturer une expression de $f_a(x)$ comme image d'un réel par la fonction exp.

II. Démonstration

Prérequis : 1) la fonction exp ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ et exp(0)=1 (cf intro)
2) formules de dérivées
3) si pour tout réel x , $f'(x)=0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$

Soit un réel a et h_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(x)=\dfrac{\exp(a)\times\exp(x)}{\exp(a+x)}$

1) Démontrer que pour tout réel x , $h_a(x)=1$
2) Conclure.
3) Cette relation dépend-elle de la valeur a choisie au départ?

III. Conséquences

1) Calculer l'expression $\exp(a)\times\exp(-a)$.
En déduire $\exp(-a)$ en fonction de $\exp(a)$.
En déduire l'expression de $\exp(a-b)$ en fonction de $\exp(a)$ et de $\exp(b)$.

2) Exprimer $\exp(2a)$ en fonction de $\exp(a)$.
Exprimer $\exp(3a)$ en fonction de $\exp(a)$.
Conjecturer l'expression pour $n \in \mathbb{N}$, de $\exp(n\times a)$ en fonction de $\exp(a)$.
Démontrer cette conjecture par récurrence.