La méthode du pivot de Gauss
Résolution des systèmes linéaires

I. Triangularisation

On considère un système linéaire (S) à n inconnues et p équations. L'objectif est de déterminer un système (S') triangulaire supérieur équivalent au système (S).

$$\left\{\begin{array}{cccccc} a_1 x & +b_1 y & +c_1 z & +d_1 t & = & e_1 \\ a_2 x & +b_2 y & +c_2 z & +d_2 t & = & e_2 \\ a_3 x & +b_3 y & +c_3 z & +d_3 t & = & e_3 \\ a_4 x & +b_4 y & +c_4 z & +d_4 t & = & e_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} f_1 x & +g_1 y & +h_1 z & +k_1 t & = & m_1 \\ & g_2 y & +h_2 z & +k_2 t & = & m_2 \\ & & h_3 z & +k_3 t & = & m_3 \\ & & & k_4 t & = & m_4 \end{array}\right.$$

Exemples :
Pour déterminer l'intersection de 2 plans on a : ... inconnues et ... équations
Pour déterminer l'intersection de 3 plans on a : ... inconnues et ... équations
Pour déterminer l'intersection d'un plan et d'une droite on a : ... inconnues et ... équations
Pour déterminer une équation cartésienne d'un plan passant par 3 points donnés on a : ... inconnues et ... équations

On procède par éliminations successives des inconnues dans les lignes de systèmes tous équivalents au système (S). Pour assurer l'équivalence à chaque étape, seuls deux types d'opérations (inversibles) sur les lignes sont autorisés. A chaque étape la i-ème ligne est désignée par L_i:

Soient deux entiers naturels i et j : $i \neq j$	Opération	Opération inverse
Interversion de deux lignes	$L_i \leftrightarrow L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$
Combinaison linéaire avec $\alpha \neq 0$	$L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$	$L_i \leftarrow \frac{1}{\alpha}(L_i - \beta L_j)$

Remarque : pour que la combinaison linéaire soit inversible, il faut que la ligne L_j ne soit pas modifiée en même temps que la ligne L_i, d'où la nécessité de conserver une ligne inchangée à chaque étape.

Application au système : $\begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ x + 2y - z = 6 \\ -x + y + 2z = 11 \end{cases}$

1. Placer dans la 1ère ligne une équation dans laquelle le coefficient de la première inconnue est non nul (et le plus "simple" possible). Ce coefficient est appelé <u>pivot</u>.			.....
2. Supprimer <u>dans les lignes suivantes</u> la première inconnue par combinaison linéaire avec la 1ère ligne. On obtient alors un sous-système contenant une variable de moins sur lequel on réitère les étapes précédentes...			

Remarque : si lors des étapes successives une ligne devient inutile (du type "0=0") alors le système est dit <u>redondant</u> et on peut supprimer cette ligne dans les étapes suivantes.

II. Remontée

A l'issue de la phase de triangularisation, 3 cas de figures sont possibles pour la dernière ligne:

Il n'y a plus d'inconnue	on obtient une ligne incohérente (du type "1=0"), alors le système est dit <u>incompatible</u> et n'admet <u>aucune solution</u>
Il y a une unique inconnue	on détermine successivement la valeur de chaque inconnue par substitution dans les lignes supérieures. Le système admet un <u>unique n-uplet solution</u>.
Il reste plusieurs inconnues	on exprime une inconnue en fonction des autres qui vont devenir des paramètres puis on exprime toutes les inconnues <u>en fonction de ces paramètres</u> par substitution dans les lignes supérieures. Le système admet une <u>infinité de n-uplets solutions</u>.

Application au système : $\begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ x + 2y - z = 6 \\ -x + y + 2z = 11 \end{cases}$