Géométrie dans l'espace

Produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace

Définition: le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel $\vec{u}.\vec{v}$ défini par :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)}$$

Règles de calculs:

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}}$$

$$\boxed{\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}}$$

$$\boxed{(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})}$$

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **orthonormé** soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$$

Produit scalaire et angle

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})}$$

Orthogonalité: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Soit $\vec{n}$ un vecteur **non nul** et P un plan de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires:

$\vec{n}$ est un **vecteur normal** à P si et seulement s'il est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$

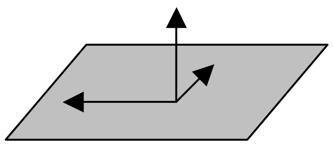
Soit $\vec{n}$ un vecteur **non nul** et A un point de l'espace L'ensemble des points M du plan vérifiant $\vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Equation cartésienne d'un plan:

Tout plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ a une équation du type $ax+by+cz+d=0$

Réciproquement, si a, b, c et d sont quatre réels (a, b et c non tous nuls) alors l'ensemble de points M($x;y;z$) de l'espace vérifiant $ax+by+cz+d=0$

est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$



Barycentre

Soit A_1, …, A_n, n points de l'espace et $a_1, \ldots, a_n$, n réels tels que $a_1 + .. + a_n \neq 0$.

Définition: On appelle barycentre du système des n points pondérés $\{(A_1,a_1),\ldots,(A_n,a_n)\}$ l'unique point G tel que

$$\boxed{a_1\overrightarrow{GA_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}}$$

Règles de calculs:

Homogénéité : pour tout k réel non nul $\boxed{Bar\{(A_1,a_1),\ldots,(A_n,a_n)\} = Bar\{(A_1,ka_1),\ldots,(A_n,ka_n)\}}$

Propriété caractéristique : soit M un point quelconque de l'espace:

$$\boxed{G = Bar\{(A_1,a_1),\ldots,(A_n,a_n)\} \text{ si et seulement si } (a_1+\ldots+a_n)\overrightarrow{MG} = a_1\overrightarrow{MA_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{MA_n}}$$

Barycentre intermédiaire : soit un entier $p<n$ tel que $a_1 + .. + a_p \neq 0$ et H=Bar$\{(A_1,a_1),\ldots,(A_p,a_p)\}$

$$\boxed{G = Bar\{(A_1,a_1),\ldots,(A_n,a_n)\} \text{ si et seulement si } G = Bar\{(H, a_1+\ldots+a_p),(A_{p+1},a_{p+1})\ldots,(A_n,a_n)\}}$$

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ quelconque soit $A_1(x_1;y_1;z_1)$, …, $A_n(x_n;y_n;z_n)$ et G=Bar$\{(A_1,a_1),\ldots,(A_n,a_n)\}$ alors:

$$\boxed{G\left(\frac{a_1x_1+\ldots+a_nx_n}{a_1+\ldots+a_n};\frac{a_1y_1+\ldots+a_ny_n}{a_1+\ldots+a_n};\frac{a_1z_1+\ldots+a_nz_n}{a_1+\ldots+a_n}\right)}$$

Soit A et B deux points **distincts** l'espace:

$M \in (AB)$ si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a+b \neq 0$ et M=Bar$\{(\text{A},a);(B,b)\}$

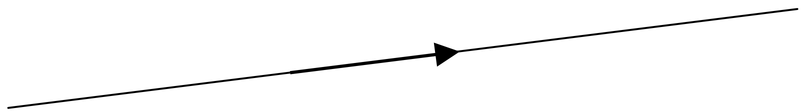
$M \in [AB]$ si et seulement s'il existe a et b deux réels de meme signe tels que $a+b \neq 0$ et M=Bar$\{(\text{A},a);(B,b)\}$

Soit A, B et C trois points **non alignés** de l'espace:

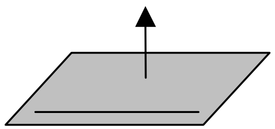
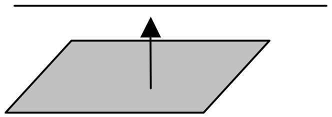
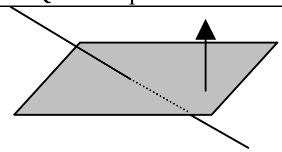
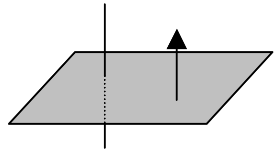
$M \in (ABC)$ si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ et c$\in \mathbb{R}$ tels que $a+b+c \neq 0$ et M=Bar$\{(\text{A},a);(B,b);(C,c)\}$

M appartient au triangle ABC ssi il existe a,b et c trois réels de meme signe tels que $a+b+c \neq 0$ et M=Bar$\{(\text{A},a);(B,b);(C,c)\}$

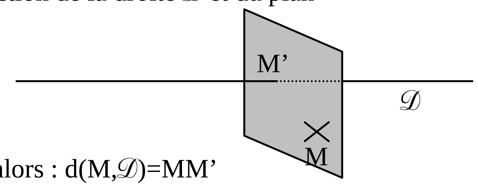
Représentation paramétrique d'une droite: soit D la droite de l'espace passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ alors $\begin{cases}x = x_A + k\alpha\\y = y_A + k\beta\\z = z_A + k\gamma\end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite D. Ce qui signifie que pour M un point de l'espace: $M \in D$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que M$(x_A + k\alpha; y_A + k\beta; z_A + k\gamma)$

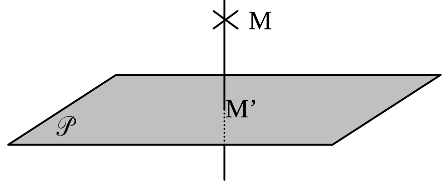


Position relative d'une droite et d'un plan

<table>
<tr><td colspan="2"><u>Parallèles</u> : Une droite et un plan sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de la droite est orthogonal à un vecteur normal du plan.</td><td colspan="2"><u>Sécants</u> : Une droite et un plan sont sécants si et seulement si un vecteur directeur de la droite n'est pas orthogonal à un vecteur normal du plan.</td></tr>
<tr><td>Incluse</td><td>Strictement parallèle</td><td>Quelconques</td><td>Perpendiculaires</td></tr>
<tr>
<td>Exemple : déterminer la position relative de la droite $\mathscr{D}$ d'équation paramétrique

$\begin{cases} x = 7 + k \\ y = 5 + k \\ z = -6 - k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$ avec le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x+2y+3z+1=0$</td>
<td>Exemple : déterminer la position relative de la droite $\mathscr{D}$ d'équation paramétrique

$\begin{cases} x = 4 + k \\ y = 5 + k \\ z = 6 - k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$ avec le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x+2y+3z+1=0$</td>
<td>
Exemple : déterminer la position relative de la droite $\mathscr{D}$ d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 4 + k \\ y = 5 + k \\ z = 6 - 2k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$ avec le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x+2y+3z+1=0$</td>
<td>Une droite et un plan sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur directeur de la droite est normal au plan.

Exemple : $\begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = 5 + 4k \\ z = 6 + 6k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$ avec le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x+2y+3z+6=0$</td>
</tr>
</table>

Projection orthogonale

<table>
<tr>
<td>Projection orthogonale sur une droite :
Soit $\mathscr{D}$ une droite de l'espace. La projection orthogonale sur $\mathscr{D}$ est l'application qui à tout point M de l'espace associe le point M' de l'espace intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par M.
M' est appelé projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.


Remarque : la distance de M à $\mathscr{D}$, notée d(M,$\mathscr{D}$), est alors : d(M,$\mathscr{D}$)=MM'</td>
<td>Projection orthogonale sur un plan :
Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. La projection orthogonale sur le plan P est l'application qui à tout point M de l'espace associe le point M' de l'espace intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite orthogonale à $\mathscr{P}$ passant par M.
M' est appelé projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$.


Remarque : la distance de M à $\mathscr{P}$, notée d(M,$\mathscr{P}$), est alors : d(M,$\mathscr{P}$)=MM'</td>
</tr>
<tr>
<td>Exemple : ($\mathscr{D}$) : $\begin{cases} x = 1 + 4k \\ y = 2 + 5k \\ z = 3 + 6k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$ et A(7;8;9)
d(A,$\mathscr{D}$)=</td>
<td>Distance d'un point à un plan dans l'espace :
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit $\mathscr{P}$ un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et A(x_A ;y_A ;z_A) un point de l'espace alors $\boxed{d\left(A,\mathscr{P}\right) = \dfrac{\left|ax_A + by_A + cz_A + d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$</td>
</tr>
</table>

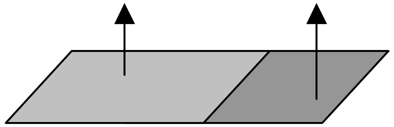
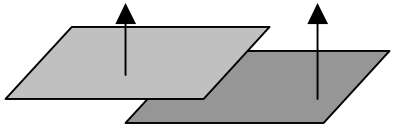
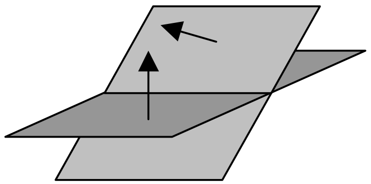
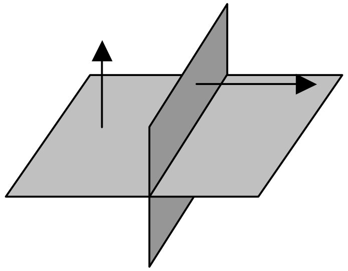
<u>Partage de l'espace</u> : le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ partage l'espace en deux demi-espaces ouverts de frontière $\mathscr{P}$:

l'un est l'ensemble des points M(x;y;z) tels que $ax+by+cz+d>0$

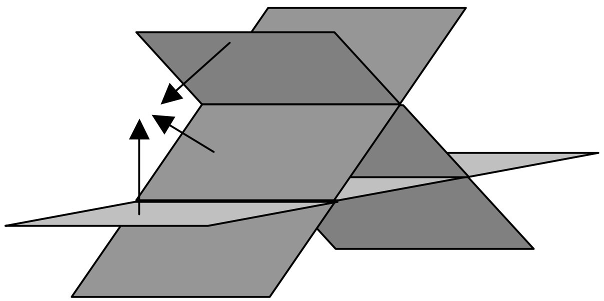
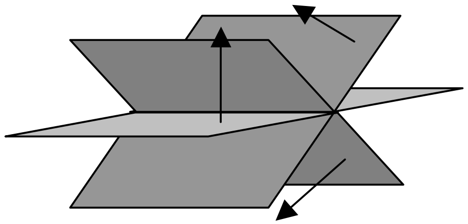
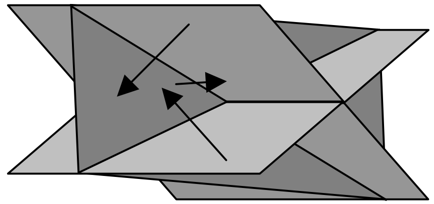
l'autre est l'ensemble des points M(x;y;z) tels que $ax+by+cz+d<0$

Exemple :

Position relative de deux plans

<table>
<tr><td colspan="2"><u>Parallèles</u> : Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.</td><td colspan="2"><u>Sécants</u> : Deux plans sont sécants si et seulement si leurs vecteurs normaux sont ne sont pas colinéaires.</td></tr>
<tr><td>Confondus</td><td>Strictement parallèles</td><td>Quelconques</td><td>Perpendiculaires</td></tr>
<tr>
<td>Exemple :

$\begin{cases} x+2y+3z+4=0 \\ 3x+6y+9z+12=0 \end{cases}$</td>
<td>Exemple :

$\begin{cases} x+2y+3z+4=0 \\ -2x-4y-6z+5=0 \end{cases}$ $S=\varnothing$</td>
<td>L'intersection des deux plans est alors une droite dont le vecteur directeur est orthogonal aux vecteurs normaux.

Exemple :
$\begin{cases} x+y+z+4=0 \\ x+2y+3z+5=0 \end{cases}$ $S=\{(-3+k;-1-2k;k)\,/\,k\in\mathbb{R}\}$</td>
<td>Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Exemple :
$\begin{cases} x+y+z+4=0 \\ x+2y-3z+5=0 \end{cases}$
$S=\{(-3-5k;-1+4k;k)\,/\,k\in\mathbb{R}\}$</td>
</tr>
</table>

Position relative de trois plans distincts deux à deux

<table>
<tr><td colspan="2">Si les vecteurs normaux aux plans sont coplanaires alors l'intersection des trois plans est vide ou une droite.</td><td>Si les vecteurs normaux aux plans ne sont pas coplanaires alors l'intersection des trois plans est un point.</td></tr>
<tr>
<td>
Exemple :
$\begin{cases} x+y+z+4=0 \\ x+2y+3z+5=0 \\ y+2z+3=0 \end{cases}$ $S=\varnothing$</td>
<td>
Exemple :
$\begin{cases} x+y+z+4=0 \\ x+2y+3z+5=0 \\ y+2z+1=0 \end{cases}$ $S=\{(-3+k;-1-2k;k)\,/\,k\in\mathbb{R}\}$</td>
<td>
Exemple :
$\begin{cases} x+y+z+4=0 \\ x+2y+3z+5=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$ $S=\{(-3\,;-1\,;0)\}$</td>
</tr>
</table>