Equations différentielles d'un nouveau type

Partie A : Soit a un nombre réel non nul fixé. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: (E1) : $y' = ay$

1) Démontrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto e^{ax}$ est une solution particulière de (E1)

2) Soit k un nombre réel non nul fixé. Démontrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto e^{ax} + k$ n'est pas une solution de (E1)

3) Démontrer que si f est une solution de (E1) alors la fonction $x \mapsto f(x)e^{-ax}$ est constante sur $\mathbb{R}$

4) En déduire toutes les solutions f de (E1)

5) Résoudre les équations différentielles avec condition initiale sur $\mathbb{R}$ suivantes:

$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y' = 3y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y' = 3y \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y' = 3y \\ y(1) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y' = -3y \\ y(1) = 2 \end{cases}$

6)Soit x_0 et y_0 deux nombres réels.

On considère l'équation différentielle avec condition initiale sur $\mathbb{R}$:

$$\text{(E2) : } \begin{cases} y' = ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Démontrer que (E2) admet une unique solution et donner son expression.

Partie B Soit a et b deux nombres réels non nuls fixés. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: (E3) : $y' = ay+b$

1) Soit k un nombre réel fixé. Démontrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ke^{ax}$ ne sont pas des solutions de (E3).

2) Déterminer le nombre réel k tel que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto e^{ax} + k$ soit une solution particulière de (E3)

3) Démontrer que si f est une solution de (E3) alors la fonction $x \mapsto \left(f(x) + \frac{b}{a} \right) e^{-ax}$ est constante sur $\mathbb{R}$

4) En déduire toutes les solutions f de (E3)

5) Résoudre les équations différentielles avec condition initiale sur $\mathbb{R}$ suivantes:

$\begin{cases} y' = y+3 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y' = 3y+2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y' = 3y-4 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y' = 3y+2 \\ y(1) = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} y' = -3y-4 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

6)Soit x_0 et y_0 deux nombres réels.

On considère l'équation différentielle avec condition initiale sur $\mathbb{R}$

$$\text{(E4) : } \begin{cases} y' = ay+b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Démontrer que (E4) admet une unique solution et donner son expression.

Equations différentielles d'un nouveau type

Partie A : Soit a un nombre réel non nul fixé. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: (E1) : $y' = ay$

1) Démontrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto e^{ax}$ est une solution particulière de (E1)

2) Soit k un nombre réel non nul fixé. Démontrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto e^{ax} + k$ n'est pas une solution de (E1)

3) Démontrer que si f est une solution de (E1) alors la fonction $x \mapsto f(x)e^{-ax}$ est constante sur $\mathbb{R}$

4) En déduire toutes les solutions f de (E1)

5) Résoudre les équations différentielles avec condition initiale sur $\mathbb{R}$ suivantes:

$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y' = 3y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y' = 3y \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y' = 3y \\ y(1) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y' = -3y \\ y(1) = 2 \end{cases}$

6)Soit x_0 et y_0 deux nombres réels.

On considère l'équation différentielle avec condition initiale sur $\mathbb{R}$:

$$\text{(E2) : } \begin{cases} y' = ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Démontrer que (E2) admet une unique solution et donner son expression.

Partie B Soit a et b deux nombres réels non nuls fixés. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: (E3) : $y' = ay+b$

1) Soit k un nombre réel fixé. Démontrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ke^{ax}$ ne sont pas des solutions de (E3).

2) Déterminer le nombre réel k tel que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto e^{ax} + k$ soit une solution particulière de (E3)

3) Démontrer que si f est une solution de (E3) alors la fonction $x \mapsto \left(f(x) + \frac{b}{a} \right) e^{-ax}$ est constante sur $\mathbb{R}$

4) En déduire toutes les solutions f de (E3)

5) Résoudre les équations différentielles avec condition initiale sur $\mathbb{R}$ suivantes:

$\begin{cases} y' = y+3 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y' = 3y+2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y' = 3y-4 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y' = 3y+2 \\ y(1) = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} y' = -3y-4 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

6) Soit x_0 et y_0 deux nombres réels.

On considère l'équation différentielle avec condition initiale sur $\mathbb{R}$

$$\text{(E4) : } \begin{cases} y' = ay+b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Démontrer que (E4) admet une unique solution et donner son expression.