Les équations différentielles

1. Définition

Une **équation différentielle** est **une égalité**, valable sur **un intervalle donné I**, comprenant une **fonction inconnue** (et sa dérivée ou ses dérivées successives).
Résoudre une équation différentielle consiste à déterminer **toutes les fonctions** vérifiant l’égalité sur l’intervalle donné.

Notations : l’équation différentielle : $y’=y+x$ sur I
signifie que l’on cherche les fonctions f telles que $f’(x)=f(x)+x$ pour tout $x \in$ I
Une **condition initiale** est la donnée de la valeur de l’image d’un nombre par les fonctions recherchées : $y(0)=2$ signifie que l’on impose $f(0)=2$

2. Equation différentielles de la forme *y’=g* sur I

Théorème (admis pour l’instant…) : si la fonction g est **continue sur I** alors **il existe une solution** G définie sur I de l’équation différentielle $y’=g$
Définition : la fonction G est **une primitive** de g surI
Théorème : si la fonction g est continue sur l’intervalle I alors **toutes les solutions** de l’équation différentielle $y’=g$ sont de la forme $\boxed{x \mapsto G(x)+k \text{ où } k \in \mathbb{R}}$
Remarque : l’ajout d’une condition initiale impose une valeur à la constante k, il existe alors **une unique solution**.

3. Equation différentielles de la forme *y’=ay* sur ℝ

Théorème : soit a un réel, **les** solutions sur $\mathbb{R}$ de l’équation différentielle : $y’=ay$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x)=Ce^{ax} \text{ avec C constante réelle}}$
Corollaire : **la** solution sur $\mathbb{R}$ de l’équation différentielle avec condition initiale $\begin{cases} y'=ay \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=y_0e^{a(x-x_0)}$

4. Equations différentielles de la forme : *y’=ay+b* sur ℝ

Théorème :soient a et b deux réels, **les** solutions sur $\mathbb{R}$ de l’équation différentielle : $y’=ay+b$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a} \text{ avec C cste réelle}}$
Corollaire : **la** solution sur $\mathbb{R}$ de l’équation différentielle avec condition initiale $\begin{cases} y'=ay+b \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left(y_0+\frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)}-\frac{b}{a}$

5. Autres types d’équations différentielles.

La résolution d’autres types d’équations différentielles se ramène souvent à un des cas précédents par l’intermédiaire d’un changement de variable. La difficulté est alors de démontrer **l’équivalence** entre l’équation différentielle de départ et l’équation modifiée…

Les équations différentielles

1. Définition

Une **équation différentielle** est **une égalité**, valable sur **un intervalle donné I**, comprenant une **fonction inconnue** (et sa dérivée ou ses dérivées successives).
Résoudre une équation différentielle consiste à déterminer **toutes les fonctions** vérifiant l’égalité sur l’intervalle donné.

Notations : l’équation différentielle : $y’=y+x$ sur I
signifie que l’on cherche les fonctions f telles que $f’(x)=f(x)+x$ pour tout $x \in$ I
Une **condition initiale** est la donnée de la valeur de l’image d’un nombre par les fonctions recherchées : $y(0)=2$ signifie que l’on impose $f(0)=2$

2. Equation différentielles de la forme *y’=g* sur I

Théorème (admis pour l’instant…) : si la fonction g est **continue sur I** alors **il existe une solution** G définie sur I de l’équation différentielle $y’=g$
Définition : la fonction G est **une primitive** de g surI
Théorème : si la fonction g est continue sur l’intervalle I alors **toutes les solutions** de l’équation différentielle $y’=g$ sont de la forme $\boxed{x \mapsto G(x)+k \text{ où } k \in \mathbb{R}}$
Remarque : l’ajout d’une condition initiale impose une valeur à la constante k, il existe alors **une unique solution**.

3. Equation différentielles de la forme *y’=ay* sur ℝ

Théorème : soit a un réel, **les** solutions sur $\mathbb{R}$ de l’équation différentielle : $y’=ay$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x)=Ce^{ax} \text{ avec C constante réelle}}$
Corollaire : **la** solution sur $\mathbb{R}$ de l’équation différentielle avec condition initiale $\begin{cases} y'=ay \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=y_0e^{a(x-x_0)}$

4. Equations différentielles de la forme : *y’=ay+b* sur ℝ

Théorème :soient a et b deux réels, **les** solutions sur $\mathbb{R}$ de l’équation différentielle : $y’=ay+b$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a} \text{ avec C cste réelle}}$
Corollaire : **la** solution sur $\mathbb{R}$ de l’équation différentielle avec condition initiale $\begin{cases} y'=ay+b \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left(y_0+\frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)}-\frac{b}{a}$

5. Autres types d’équations différentielles.

La résolution d’autres types d’équations différentielles se ramène souvent à un des cas précédents par l’intermédiaire d’un changement de variable. La difficulté est alors de démontrer **l’équivalence** entre l’équation différentielle de départ et l’équation modifiée…