Sens de variation sans dérivation

I Sens de variation et opérations

1. Préliminaires

Lemme : soient a, b, c et d quatre nombres réels : $\boxed{\text{si } \begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \text{ alors } a+c<b+d}$

"On peut additionner membre à membre deux inégalités de même sens"

démonstration:

on ne peut pas, en général, soustraire, multiplier ou diviser deux inégalités entre elles

Exemples:

2. Somme de deux fonctions

Théorème d'addition de fonctions monotones:

- la somme de deux fonctions croissantes sur un intervalle I est croissante sur I
- la somme de deux fonctions décroissantes sur un intervalle I est décroissante sur I

Démonstration :

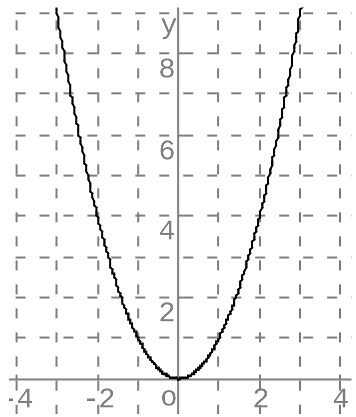
Exemple:

on ne peut rien dire en général de la différence, du produit ou du quotient de deux fonctions ayant le même sens de variation.

II Sens de variation et composition

Préliminaire: une fonction u définie sur un intervalle I est à images dans un intervalle J si pour tout réel $x \in$ I, $u(x) \in$ J

Exemples :



la fonction carré définie sur [2;3] est à images dans

la fonction carré définie sur [-3;-1] est à images dans

la fonction carré définie sur [-3;2] est à images dans

Remarque : si u définie sur I est à images dans J, pour que la fonction v o u soit définie sur I, la fonction v doit être définie (au moins) sur J

$$x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{v} v(u(x))$$

$$I \longrightarrow J \longrightarrow \mathbb{R}$$

Théorème de composition de fonctions monotones :

Soit u une fonction monotone sur un intervalle I et à images dans un intervalle J et v une fonction monotone sur J:

- si u et v ont même sens de variation respectivement sur I et J alors v o u est croissante sur I
- si u et v n'ont pas le même sens de variation respectivement sur I et J alors v o u est décroissante sur I

Démonstration :