Continuité et dérivabilité.

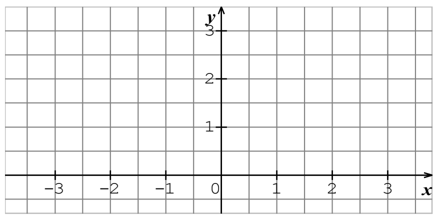
<u>Propriété</u> : toute fonction dérivable sur un intervalle ouvert I est continue sur I.

Démonstration : soit *f* dérivable en un réel $a \in$ I, alors pour tout $x \in I$, $x \neq a$ on a:

$$f(x) = f(a) + \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) \times (x - a)$$

Donc...

La réciproque de cette propriété est fausse!



Contre-exemple : la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto |x|$

La fonction valeur absolue est continue en 0 car....

La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 car...

Dérivation des fonctions composées

<u>Théorème</u> : Soit *u* une fonction définie et **dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J**, et *v* une fonction définie et **dérivable sur un intervalle J**. Alors la fonction $v \circ u$ **est dérivable sur I** et pour tout *x* de I on a :

$$\boxed{(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))}$$

la fonction $v \circ u : x \xmapsto{\ u\ } u(x) \xmapsto{\ v\ } v(u(x))$

la dérivée $(v \circ u)'$:

$$\left.\begin{array}{l} x \xmapsto{\ u'\ } u'(x) \\ \Big\downarrow u \\ u(x) \xmapsto{\ v'\ } v'(u(x)) \end{array}\right\} u'(x) \times v'(u(x))$$

Démonstration : soit $a \in I$ et $x \in I$ tels que $x \neq a$ et $u(x) \neq u(a)$ alors :

$$\frac{v(u(x)) - v(u(a))}{x - a} = \frac{v(u(x)) - v(u(a))}{u(x) - u(a)} \times \frac{u(x) - u(a)}{x - a}$$

Donc...

Exemples : $(\sin(x^3))' = \ldots$ $\qquad$ $(\sin^3(x))' = \ldots$

<u>Corollaires</u> : soit *u* une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $n \in \mathbb{N}$,

La fonction $x \mapsto (u(x))^n$ est dérivable sur I et : $\boxed{((u(x))^n)' = u'(x) \times n(u(x))^{n-1}}$

Si *u* ne s'annule pas sur I alors la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(u(x))^n}$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{\left(\frac{1}{(u(x))^n}\right)' = -n \times \frac{u'(x)}{(u(x))^{n+1}}}$$

Si *u* est strictement positive sur I alors a fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}}$$

Exemples :

$((x^2+1)^5)' = \ldots$ $\qquad$ $\left(\dfrac{1}{(x^2+1)^5}\right)' = \ldots$ $\qquad$ $(\sqrt{x^2+1})' = \ldots$