La géométrie euclidienne plane

I Droites

1) Distances

Définition : la médiatrice d'un segment est
la droite perpendiculaire à ce segment
et qui le coupe en son milieu.

Propriété : l'ensemble des points à égale distance
des points A et B est la médiatrice du segment [AB]
Soit M un point du plan et (D) la médiatrice du
segment [AB] $\boxed{MA=MB \Leftrightarrow M\in(D)}$

Définition : soit A un point et (D) une droite du plan.
Le projeté orthogonal du point A sur la droite (D) est
le point A' intersection de (d)
et de la perpendiculaire à (D) passant par A.

Propriété : la distance entre le point A et la droite (D)
est la longueur AA' où A' est le projeté orthogonal de
A sur (D)

2) Droites sécantes

Définitions : soient des points A, O et A' alignés dans cet ordre et B, O, B' alignés dans cet ordre.
Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ sont opposés par le sommet et : $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$
Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOA'}$ sont supplémentaires et $\widehat{AOB} + \widehat{BOA'} = 180°$

Définition:la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ est
la demi-droite [OC) telle que $\widehat{AOC}=\widehat{COB}$

3) Droites parallèles

Définition : soient deux droites (D) et (D') coupées par une troisième (Δ).
Deux angles sont alternes-internes s'ils sont :
de part et d'autre de (Δ),
entre (D) et(D')
et non-adjacents.

Propriété : deux droites sont parallèles
si et seulement si
deux angles alternes-internes sont égaux.

Cas particulier : si deux droites
sont perpendiculaires à une même droite
alors elles sont parallèles entre elles.

Théorème de Thalès: les points O, A, A' et O, B ,B' sont alignés.
Si (AB) et (A'B') sont parallèles
alors $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$
Exemple:

Contraposée du théorème de Thalès : les points O, A, A' et O, B ,B' sont alignés.
Si $\frac{OA}{OA'} \neq \frac{OB}{OB'}$ ou si $\frac{OA}{OA'} \neq \frac{AB}{A'B'}$ ou si $\frac{OB}{OB'} \neq \frac{AB}{A'B'}$
Alors (AB) et (A'B') ne sont pas parallèles
Exemple :

Réciproque du théorème de Thalès : les points O, A, A' et O, B ,B' sont alignés.
Si O, A, A' et O, B, B'sont dans le même ordre
et si $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$
alors (AB) est parallèle à (A'B')
Exemple:

II Triangles

1) Mesures

Inégalité triangulaire : soient A, B et C
trois points du plan
alors : $AB \leqslant AC+CB$

Propriété : dans un triangle
la somme des angles mesure 180°

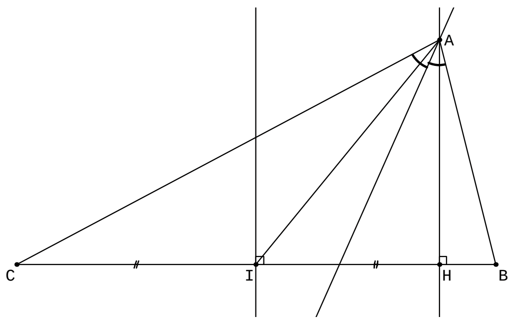
Propriété : soit ABC un triangle et
A' le projeté orthogonal de A sur (BC)
alors l'aire du triangle ABC est égale à :

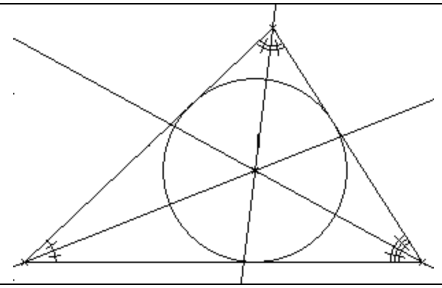
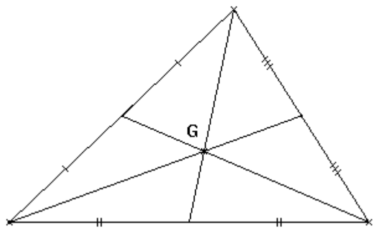
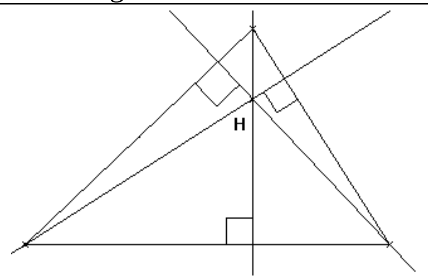
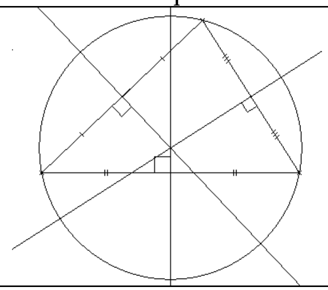
$$\frac{AA'\times BC}{2}$$

2) Droites remarquables

Définition : soit ABC un triangle et H le projeté orthogonal de A sur (BC) alors le segment [AH] est la hauteur du triangle ABC issue du sommet A.

Définition : soit ABC un triangle et I le milieu du segment [BC] alors le segment [AI] est la médiane du triangle ABC issue du sommet A.



	
Dans un triangle les…………………..des trois angles sont concourantes en un point qui est le centre du cercle ……………… dans le triangle.	Dans un triangle les trois ………..…sont concourantes en un point qui est le …………………du triangle. (il est placé au tiers de chaque…………..…..)
	
Dans un triangle les trois ………..….. sont concourantes en un point qui est …………………..du triangle.	Dans un triangle les …………………..des trois côtés sont concourantes en un point qui est le centre du cercle ………… au triangle.

Dans un triangle ABC, le point I est le milieu de [AB], la droite (D) passe par I et coupe (AC) en J:

Théorème de la droite des milieux :
Si J est le milieu de [AC]
alors (D) est parallèle à (BC)

Réciproque du théorème de la droite des milieux
Si (D) est parallèle à (BC)
alors J est le milieu de [AC]

Remarque : dans les deux cas $IJ = \frac{BC}{2}$

3) Triangles particuliers

Définition : un triangle est isocèle lorsqu'il a deux côtés de même longueur.

Propriété : un triangle est isocèle
si et seulement si
il possède deux angles égaux

Définition : un triangle est équilatéral lorsqu'il a ses trois côtés de même longueur.
Propriété : un triangle est équilatéral
si et seulement si
il possède deux angles égaux à 60°.
Remarque : les angles d'un triangle équilatéral mesurent tous 60°

Définition : un triangle est rectangle lorsqu'il possède un angle droit.
Le côté opposé à l'angle droit est alors appelé hypoténuse.

Théorème de Pythagore
Si le triangle ABC est rectangle en A
alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$
Exemple :

Contraposée du théorème de Pythagore
Si $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$
alors le triangle ABC n’est pas rectangle en A

Réciproque du théorème de Pythagore
Si $AB^2 + AC^2 = BC^2$
alors le triangle ABC est rectangle en A
Exemples :

III Quadrilatères

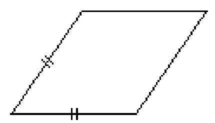
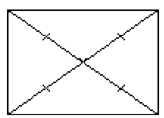
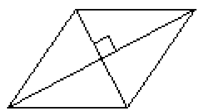
Définitions :

un parallélogramme est un quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux	
un rectangle est un quadrilatère ayant 4 angles droits	
un losange est un quadrilatère ayant 4 côtés de même longueur	
un carré est à la fois un losange et un rectangle	

Caractérisations et propriétés du parallélogramme :
Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si
_ les diagonales du quadrilatère se coupent en leur milieu
_ ce quadrilatère n'est pas croisé et les côtés opposés ont la même longueur
_ ce quadrilatère n'est pas croisé et deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (*attention à l'ordre des points*)

Caractérisations et propriétés des parallélogrammes particuliers :

		… de même longueur…	… perpendiculaires…
Un parallélogramme ayant…	… deux côtés consécutifs…	 …est un	 …est un .
	… ses diagonales…	 …est un .	 …est un

IV Cercle

1) Définitions

Définition : soit *r* un nombre réel positif et O un point.
Le cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble de points situés à une distance r du point O.
Soit (C) le cercle de centre O et de rayon *r* alors :

$$\boxed{OM=r \Leftrightarrow M\in(C)}$$

Propriétés: le périmètre d'un cercle de rayon r est égal à $2\pi r$
L'aire du disque de rayon r est égal à πr^2

Définition : une droite est tangente à un cercle
si et seulement si
ils ont un unique point en commun.

Propriété : soit (C) un cercle de centre O, (D) une droite et I un point commun à (C) et (D):
la droite (D) est tangente au cercle (C)
si et seulement si
(OI) est perpendiculaire à (D)

Définition : soient A et B deux points d'un cercle (C)
le segment [AB] est appelé corde du cercle (C)
la portion de cercle située entre les points A et B est appelée arc $\overset{\frown}{AB}$

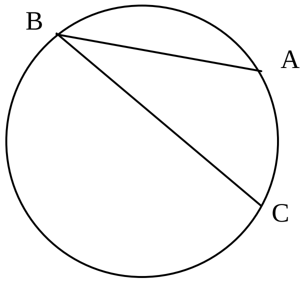
2) triangles rectangles

Propriété : le triangle ABC est rectangle en A
si et seulement si
[BC] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Angles et cercles

Angle inscrit dans un cercle

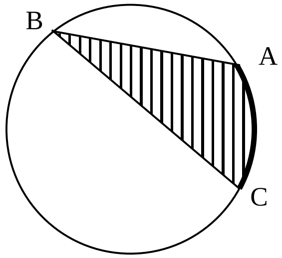
Définition :
un angle $\widehat{ABC}$ est inscrit dans un cercle
si et seulement si
les points A, B et C appartiennent à ce cercle.



Angle inscrit interceptant un arc

Définition :
L'angle $\widehat{ABC}$ inscrit dans un cercle
intercepte l'arc $\overset{\frown}{AC}$

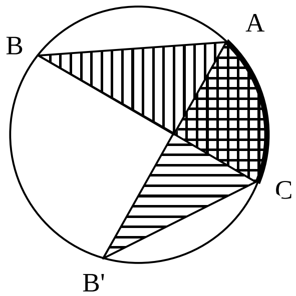
Remarque : ici "intercepter" signifie "contenir"



Angles inscrits interceptant le même arc

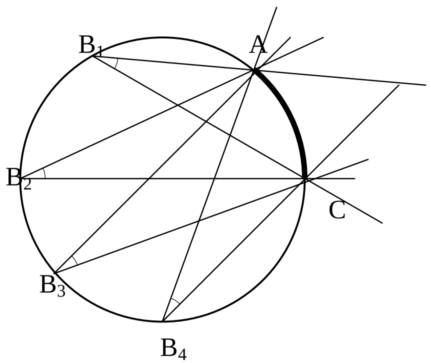
Propriété :
deux angles inscrits dans un même cercle
et interceptant le même arc
ont la même mesure

$\widehat{ABC}=\widehat{AB'C}$



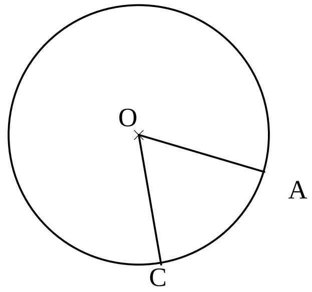
Corollaire :
étant donné un cercle et un arc de ce cercle,
tous les angles inscrits dans ce cercle
et interceptant cet arc ont la même mesure.

$\widehat{AB_1C}=\widehat{AB_2C}=\widehat{AB_3C}=\widehat{AB_4C}$



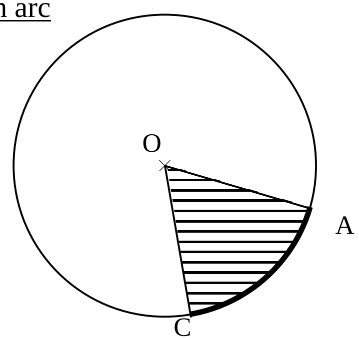
Angle au centre

Définition :
un angle $\widehat{AOC}$ est au centre d'un cercle
si et seulement si
O est le centre du cercle
et A et C appartiennent à ce cercle



Angle au centre interceptant un arc

Définition :
l'angle $\widehat{AOC}$, au centre d'un cercle,
intercepte l'arc $\overset{\frown}{AC}$



Angle inscrit et angle au centre interceptant le même arc

Propriété :
Soient $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AOC}$ deux angles respectivement
inscrit et au centre dans un même cercle
et interceptant le même arc
alors : $\widehat{AOC} = 2\ \widehat{ABC}$