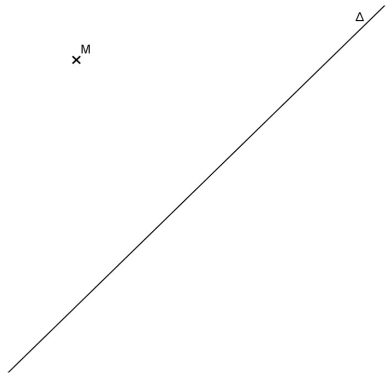
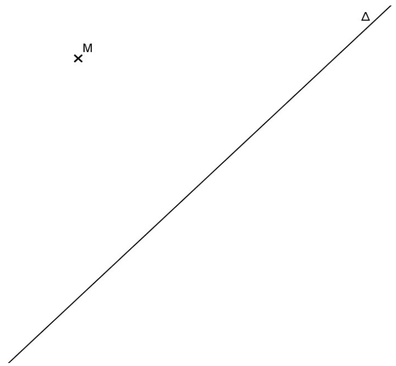
Trois transformations du plan

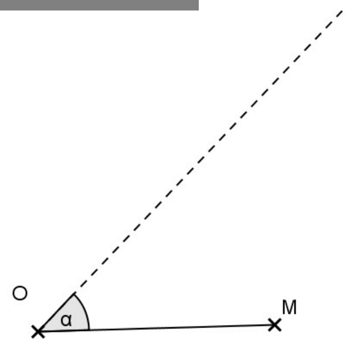
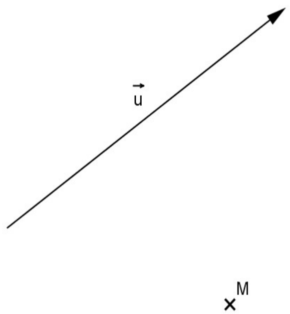
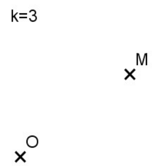
On se place dans le plan euclidien orienté dans le sens direct.
Définition : une transformation f du plan est une application qui a tout point M du plan fait correspondre un point M' noté $f(M)$, telle que tout point N' du plan admette un unique antécédent par f noté $f^{-1}(N')$. L'application f^{-1} ainsi définie est appelée réciproque de l'application f.

Exemple : la symétrie d'axe Δ est une transformation du plan. Sa transformation réciproque est ...



Contre-exemple : la projection orthogonale sur la droite Δ n'est pas une transformation du plan. En effet ...

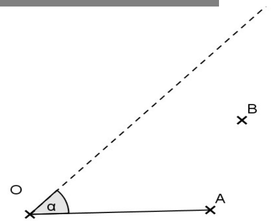


	Les rotations	Les translations	Les homothéties
Image d'un point	Définition : soit O un point du plan et α un nombre réel. La rotation de centre O et d'angle α est la transformation qui à tout point M du plan fait correspondre le point M' tel que : $\boxed{\begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{OM'}) = \alpha\,[2\pi] \end{cases}}$  Remarque : la transformation réciproque de la rotation de centre O et d'angle α est... Cas particulier : la rotation d'angle π est ...	Définition : soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation qui à tout point M du plan fait correspondre le point M' tel que : $\boxed{\overrightarrow{MM'} = \vec{u}}$  Remarque : la transformation réciproque de la translation de vecteur $\vec{u}$ est ... Cas particulier : la translation de vecteur nul est ...	Définition : soit O un point du plan et k un nombre réel non nul. L'homothétie de centre O et de rapport k est la transformation qui à tout point M du plan fait correspondre le point M' tel que : $\boxed{\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}}$  Remarque : la transformation réciproque de l'homothétie de centre O et rapport k est ... Cas particulier : l'homothétie de rapport -1 est...

Images de deux points

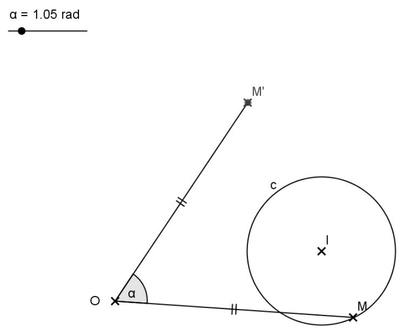
<u>Propriété</u> : soient A et B deux points du plan distincts. On note A' et B' leurs images respectives par la rotation de centre O et d'angle α.

Alors : $\boxed{\begin{cases} AB = A'B' \\ (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{A'B'}) = \alpha\, [2\pi] \end{cases}}$



Démonstration : $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) = \ldots = (\overrightarrow{OA'} ; \overrightarrow{OB'})$
... donc les triangles OAB et OA'B' sont isométriques et de même orientation donc : ...
$(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{AO} ; \overrightarrow{A'O}) + (\overrightarrow{A'O} ; \overrightarrow{A'B'})$
or $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AO}) = \ldots$ et $(\overrightarrow{AO} ; \overrightarrow{A'O}) =$ ...
Remarque : une rotation est donc une isométrie.

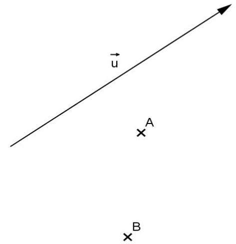
<u>Corollaire</u> : l'image du cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon r par une rotation est le cercle $\mathscr{C}'$ de centre I' (image de I par cette rotation) et de rayon r.



Démonstration : soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ et M' son <u>image</u> par la rotation de centre O et d'angle α,
alors IM=r donc I'M'=r ainsi M'...
Réciproquement, soit N' un point du cercle $\mathscr{C}'$ et N l'<u>antécédent</u> de N' par la rotation de centre O et d'angle α (N est donc l'image de N' par la rotation de centre...)
alors I'N'=r donc IN=r ainsi N...

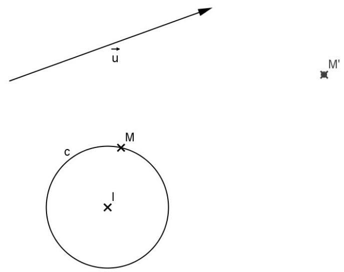
<u>Propriété</u> : soient A et B deux points du plan distincts. On note A' et B' leurs images respectives par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Alors : $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}}$



Démonstration : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B}$
or $\overrightarrow{AA'}$=... et $\overrightarrow{B'B} = \ldots$
Remarque : en particulier on a AB=A'B'. Une translation est donc une isométrie.

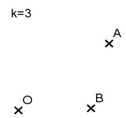
<u>Corollaire</u> : l'image du cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon r par une translation est le cercle $\mathscr{C}'$ de centre I' (image de I par cette translation) et de rayon r.



Démonstration : soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ et M' son <u>image</u> par la translation de vecteur $\vec{u}$,
alors IM=r donc I'M'=r ainsi M'...
Réciproquement, soit N' un point du cercle $\mathscr{C}'$ et N l'<u>antécédent</u> de N' par la translation de vecteur $\vec{u}$ (N est donc l'image de N' par la translation de vecteur...)
alors I'N'=r donc IN=r ainsi N...

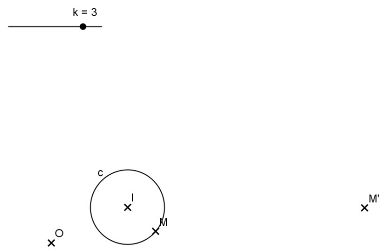
<u>Propriété</u> : soient A et B deux points du plan distincts. On note A' et B' leurs images respectives par l'homothétie de centre O et rapport $k \neq 0$.

Alors : $\boxed{k\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}}$



Démonstration : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = \ldots$
Remarque : en particulier on a $A'B' = |k| \times$ AB. Une homothétie n'est donc pas une isométrie (sauf si $k=1$ ou $k=-1$). C'est un agrandissement (si ...) ou une réduction (si ...)

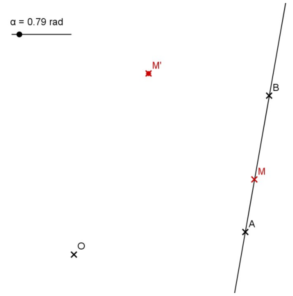
<u>Corollaire</u> : l'image du cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon r par une homothétie de rapport $k \neq 0$ est le cercle $\mathscr{C}'$ de centre I' (image de I par cette homothétie) et de rayon $|k| \times r$.



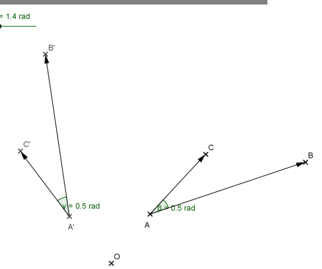
Démonstration : soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ et M' son <u>image</u> par l'homothétie de centre O et de rapport k,
alors IM=r donc I'M'=.... ainsi M'...
Réciproquement, soit N' un point du cercle $\mathscr{C}'$ et N l'<u>antécédent</u> de N' par l'homothétie de centre O et de rapport k (N est donc l'image de N' par l'homothétie de centre O et de rapport......)
alors I'N'=$|k| \times r$ donc IN=............. ainsi N...

Images de trois points

<u>Propriété</u> : une rotation transforme <u>trois points alignés</u> dans un ordre en <u>trois points alignés</u> dans le même ordre.
Démonstration : soient A,B et C trois points du plan alignés dans cet ordre alors : AB+BC=AC
donc A'B'+B'C'=A'C' ainsi ...
<u>Corollaire</u> : soient A et B deux points du plan distincts ayant pour images respectives A' et B' par une rotation, alors: _ l'image du segment [AB] par cette rotation est le segment [A'B']
_l'image de la droite (AB) par cette rotation est la droite (A'B')

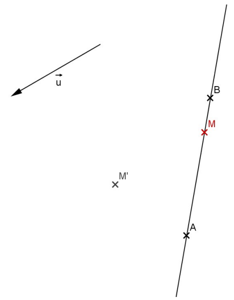


Démonstration : soit M un point du segment [AB]...
Réciproquement, soit N' un point du segment [A'B']...
Raisonnement analogue pour la droite sans spécifier l'ordre.
<u>Propriété</u> : soient A, B et C trois points du plan distincts. On note A', B' et C' leurs images respectives par la rotation de centre O et d'angle α.
Alors : $\boxed{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'})}$



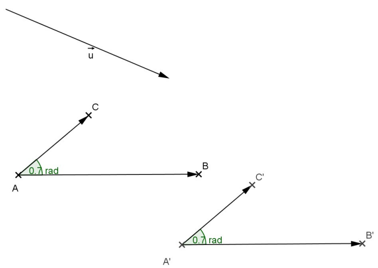
Démonstration :
$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'})+(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'})+(\overrightarrow{A'C'};\overrightarrow{AC})$
...
Remarque : on dit qu'une rotation conserve les angles orientés.
Remarque : une rotation transforme un triangle en un triangle isométrique de même sens. En particulier les deux triangles ont donc la même aire.

<u>Propriété</u> : une translation transforme <u>trois points alignés</u> dans un ordre en <u>trois points alignés</u> dans le même ordre.
Démonstration : soient A,B et C trois points du plan alignés dans cet ordre alors il existe un réel $\lambda<0$ tel que : $\overrightarrow{BA}=\lambda\,\overrightarrow{BC}$ donc...
<u>Corollaire</u> : soient A et B deux points du plan distincts ayant pour images respectives A' et B' par une translation, alors : _l'image du segment [AB] par cette translation est le segment [A'B']
_ l'image de la droite (AB) par cette translation est la droite (A'B')



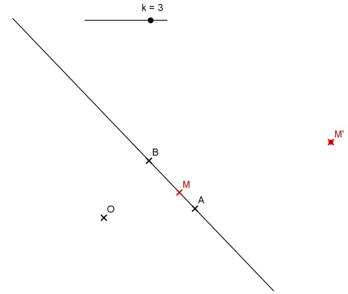
Démonstration analogue à celle de la rotation.

<u>Propriété</u> : soient A, B et C trois points du plan distincts. On note A', B' et C' leurs images respectives par la translation de vecteur $\vec{u}$.
Alors : $\boxed{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'})}$



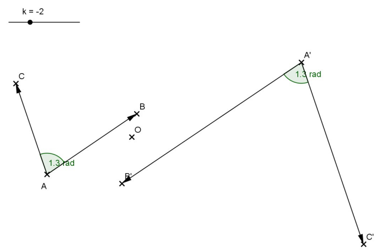
Démonstration : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$ et ...
Remarque : on dit qu'une translation conserve les angles orientés.
Remarque : une translation transforme un triangle en un triangle isométrique de même sens. En particulier les deux triangles ont donc la même aire.

<u>Propriété</u> : une homothétie transforme <u>trois points alignés</u> dans un ordre en <u>trois points alignés</u> dans le même ordre.
Démonstration : soient A,B et C trois points du plan alignés dans cet ordre alors il existe un réel $\lambda<0$ tel que : $\overrightarrow{BA}=\lambda\,\overrightarrow{BC}$ donc...
<u>Corollaire</u> : soient A et B deux points du plan distincts ayant pour images respectives A' et B' par une homothétie, alors : _ l'image du segment [AB] par cette homothétie est le segment [A'B']
_ l'image de la droite (AB) par cette homothétie est la droite (A'B')



Démonstration analogue à celle de la rotation.

<u>Propriété</u> : soient A, B et C trois points du plan distincts. On note A', B' et C' leurs images respectives par l'homothétie de centre O et rapport $k\neq 0$.
Alors : $\boxed{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'})}$



Démonstration : $\overrightarrow{A'B'}=k\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'}=k\,\overrightarrow{AC}$
donc : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=$ ...
Remarque : on dit qu'une homothétie conserve les angles orientés.
Remarque : une homothétie transforme un triangle en un triangle semblable de même sens. En particulier l'aire du triangle image est k^2 fois celle du triangle de départ.