Les suites numériques

I Modes de génération d'une suite

Définition : une suite numérique est une fonction numérique définie sur les entiers naturels $\mathbb{N}$ supérieurs ou égaux à un nombre n_0 fixé.

Notations spécifiques :

Fonctions	Suites
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I, l'image d'un nombre x de I par f est notée $f(x)$	Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique définie à partir du rang n_0, le terme d'indice $n \geqslant n_0$ est noté u_n

Exemples :

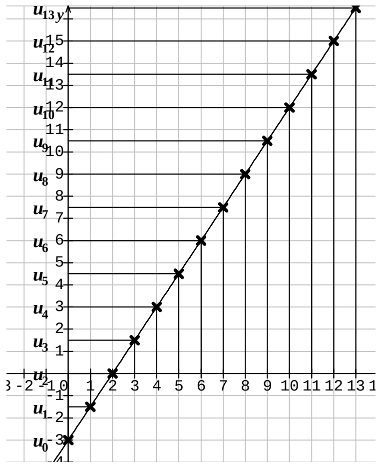
La suite de terme général $u_n = n^2 - n + 1$ est définie à partir du rang… ; $u_{10} = \ldots$

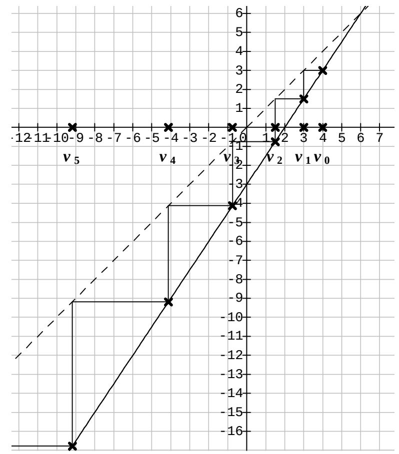
le dixième terme de la suite (u_n) est $u_{\ldots} = \ldots$

La suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{5-n}$ est définie à partir du rang …; $v_{10} = \ldots$

le dixième terme de la suite $(v_n)_{n\geq\ldots}$ est $v_{\ldots} = \ldots$

Suite définie explicitement	Suite définie par récurrence
Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est définie explicitement si une fonction f est donnée telle que pour tout $n \geqslant n_0$: $\boxed{u_n = f(n)}$ Exemple: si f est définie par $f(x) = 1{,}5x - 3$ le terme général de la suite est $u_n = \ldots$ Ainsi $u_5 = \ldots$ et $u_{1000} = \ldots$ La suite est alors représentée graphiquement par l'ensemble des points de coordonnées $(n\,;f(n))$ pour tout n entier naturel supérieur ou égal à n_0. Il suffit d'utiliser les points de la courbe représentative de f à abscisses entières.	Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est définie par récurrence si u_{n_0} et une fonction f sont donnés et tels que pour tout $n \geqslant n_0$: $\boxed{u_{n+1} = f(u_n)}$ Exemple: si f est définie par $f(x) = 1{,}5x - 3$ et $v_0 = 4$ La suite (v_n) est définie par $\begin{cases} v_0 = \ldots \\ v_{n+1} = \ldots \end{cases}$ Ainsi $v_5 = \ldots$ et $v_{1000} = \ldots$ La suite est alors représentée graphiquement par l'ensemble des points de coordonnées $(v_n\,;f(v_n))$ pour tout n entier naturel supérieur ou égal à n_0. Il suffit de placer le point de coordonnées $(v_0\,;f(v_0))$, puis à l'aide de la droite d'équation $y = x$, de placer $f(v_0) = v_1$ sur l'axe des abscisses. On peut alors réitérer le processus…





II Sens de variation d'une suite numérique

Définition : une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est

- strictement croissante si et seulement si pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $u_n < u_{n+1}$
- strictement décroissante si et seulement si pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $u_n > u_{n+1}$

Exemples :

La suite (u_n) de terme général $u_n = 1{,}5n - 3$ est…

La suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = 1{,}5v_n - 3 \end{cases}$ est …

La suite (w_n) de terme général $w_n = n^2 - 2n - 3$ est…

Méthodes pour déterminer le sens de variation d'une suite (liste non-exhaustive):

- Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$
- Si les termes de la suite sont non nuls et ont tous le même signe, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1
- Si la suite est définie explicitement par $u_n = f(n)$, étudier les variations de f

$u_{n+1} = u_n + n$	$v_{n+1} = 2v_n$ et $v_0 = -3$	$w_n = \dfrac{1}{2-n}$

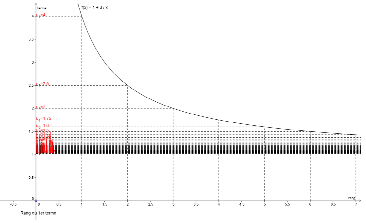
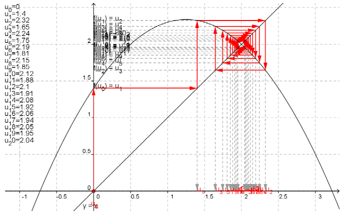
III Limite d'une suite

Définition : soit l un nombre réel. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ admet pour limite le nombre l si et seulement si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On dit alors de la suite qu'elle converge vers le nombre l et on note:

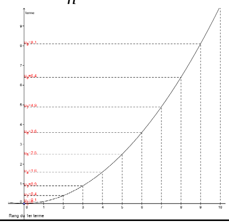
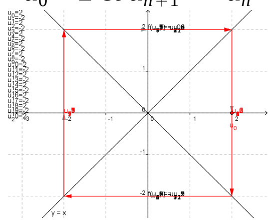
$$\lim u_n = l$$

Remarques : il est inutile de préciser : "…limite quand n tend vers $+\infty$"

La condition précédente est contraignante si on considère "tout intervalle ouvert <u>aussi petit soit-il</u> contenant l"
Une suite donnée ne peut converger vers deux nombres réels l et l' distincts. Si une suite est convergente alors il y a unicité de sa limite.

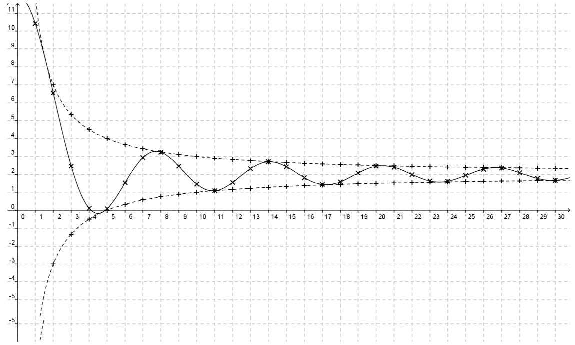
Définition explicite	Définition par récurrence
$u_n = 1 + \dfrac{3}{n}$  L'intervalle] 0,9 ; 1,1 [contient tous les termes u_n pour $n > \dots$ L'intervalle] 0,99 ; 1,01[contient tous les termes u_n pour $n > \dots$	$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -0{,}6u_n^2 + 1{,}5u_n + 1{,}4$  L'intervalle] 1,9 ; 2,1 [contient tous les termes u_n pour $n > \dots$ L'intervalle] 1,99 ; 2,01[contient tous les termes u_n pour $n > \dots$

<u>Définition</u> : une suite qui ne converge vers aucun nombre réel est dite <u>divergente</u>. Ainsi trois cas sont possibles : ou bien la suite tend vers +∞ ou bien la suite tend vers -∞ ou bien la suite <u>n'admet pas de limite</u>.

Définition explicite	Définition par récurrence
$u_n = 0.1n^2$ 	$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = -u_n$ 

Divergence vers $-\infty$	Divergence vers $+\infty$
Une suite diverge vers $-\infty$ si et seulement si tout intervalle du type $]-\infty\,;\,m[$ avec $m \in \mathbb{R}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Rem : cette condition est contraignante pour m "aussi petit (négatif) soit-il". Exemple : pour $u_n = -0{,}1n^2$ L'intervalle $]-\infty\,;\,-10[$ contient tous les termes u_n pour $n > \dots$ L'intervalle $]-\infty\,;\,-1000[$ contient tous les termes u_n pour $n > \dots$	Une suite diverge vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle du type $]M\,;\,+\infty[$ avec $M \in \mathbb{R}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Remarque : cette condition est contraignante pour M "aussi grand soit-il". Exemple : pour $u_n = \sqrt{n}$ L'intervalle $]10\,;\,+\infty[$ contient tous les termes u_n pour $n > \dots$ L'intervalle $]100\,;\,+\infty[$ contient tous les termes u_n pour $n > \dots$

<u>Théorème des "gendarmes"</u> : soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites.
Si pour tout entier naturel n supérieur ou égal à nombre fixé n_0, on a : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
et si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers <u>la même limite l</u>
alors la suite (v_n) converge vers l



Exemple : $u_n = 2 - \dfrac{10}{n}$

$v_n = 2 + \dfrac{10\sin(n)}{n}$

$w_n = 2 + \dfrac{10}{n}$

Remarque : $|v_n - l| < w_n \Leftrightarrow \dots$

<u>Opérations sur les suites convergentes</u> :
Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant respectivement vers deux réels l et l'.
<u>Somme</u> : soit la suite (s_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = u_n + v_n$
alors la suite (s_n) converge vers le nombre réel $l + l'$
<u>Produit</u> : soit la suite (p_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = u_n \times v_n$
alors la suite (p_n) converge vers le nombre réel $l \times l'$
<u>Quotient</u> : si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$ et si $l' \neq 0$
soit la suite (q_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n = \dfrac{u_n}{v_n}$
alors la suite (q_n) converge vers le nombre réel $\dfrac{l}{l'}$

Exemples :

IV Cas des suites arithmétiques et des suites géométriques

<u>Définition</u> : une suite (u_n) est dite <u>arithmétique</u> si et seulement s'il existe un nombre r tel que pour tout n nombre entier naturel n, $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$. Le nombre r est alors appelé <u>raison</u> de la suite (u_n).
Exemples : la suite (u_n) de terme général $u_n = 2n + 3$ est …
la suite (v_n) de terme général $v_n = n^2$…

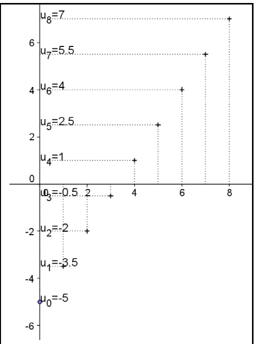
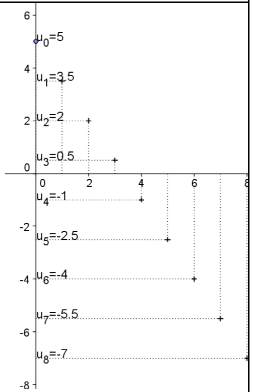
<u>Définition</u> : une suite (u_n) est dite <u>géométrique</u> si et seulement s'il existe un nombre q tel que pour tout n nombre entier naturel n, $\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$. Le nombre q est alors appelé <u>raison</u> de la suite (u_n).
Exemples : la suite (u_n) de terme général $u_n = 2 \times 3^n$ est …

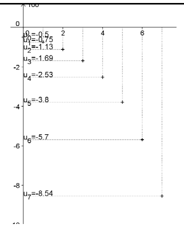
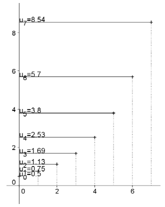
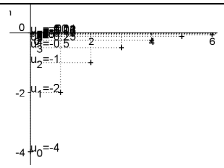
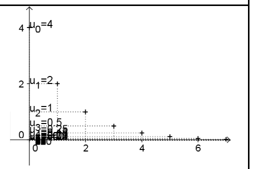
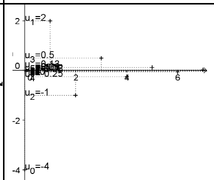
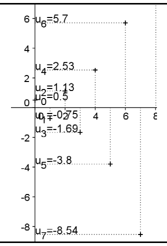
la suite (v_n) de terme général $v_n = n^3$…

		Suites arithmétiques	Suites géométriques
définition	par récurrence	$\begin{cases}u_0=a\\ u_{n+1}=u_n+r\quad\forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$	$\begin{cases}v_0=a\\ v_{n+1}=q\times v_n\quad\forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$
	explicite	$u_n=a+nr\quad\forall n\in\mathbb{N}$	$v_n=a\times q^n\quad\forall n\in\mathbb{N}$
Conséquence		$u_n=u_p+(n-p)r$	$v_n=v_p\times q^{n-p}$

Sens de variation

Limite

Suites arithmétiques	
$0<r$	 (u_n) est croissante $\text{Lim } u_n=+\infty$
$r<0$	 (u_n) est décroissante $\text{Lim } u_n=-\infty$

Suites géométriques	$v_0<0$	$v_0>0$
$1<q$	 (v_n) est décroissante $\text{Lim } v_n=-\infty$	 (v_n) est croissante $\text{Lim } v_n=+\infty$
$0<q<1$	 (v_n) est croissante $\text{Lim } v_n=0$	 (v_n) est décroissante $\text{Lim } v_n=0$
$-1<q<0$		(v_n) est alternée donc non monotone. $\text{Lim } v_n=0$
$q\leqslant-1$		(v_n) est alternée donc non monotone. La suite (v_n) n'admet pas de limite

sommes		Suites arithmétiques	Suites géométriques
	de référence	$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=0}^{n}q^k=1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
	de termes consécutifs $i<j$	$\sum_{k=i}^{j}u_k=(j-i+1)\frac{u_i+u_j}{2}=(j-i+1)\left(u_0+\frac{i+j}{2}r\right)$ $=\boxed{\text{nbre de termes}}\times\boxed{\text{moyenne des termes extrêmes}}$	$\forall q\neq1,\ \sum_{k=i}^{j}v_k=\frac{v_i-v_{j+1}}{1-q}=v_i\frac{1-q^{j-i+1}}{1-q}=v_0\times\frac{q^i-q^{j+1}}{1-q}$ $=\boxed{1^{\text{er}}\text{ terme}}\times\boxed{\frac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}}$