# Probabilités

## I Vocabulaire et notations

| Définition | Exemple |
|---|---|
| Une expérience aléatoire est une expérience dont il est impossible de prévoir l'issue (mais on connaît toutes les issues possibles) | Un sac contient 7 boules numérotées : 4 rouges (R1, R2, R3, R4) et 3 blanches (B5, B6 ,B7)<br>On tire au hasard une boule du sac. |
| Un événement élémentaire est une issue possible. | *C : « obtenir le numéro 7 »*<br>*C* = |
| On appelle univers l'ensemble des événements élémentaires. On le note $\Omega$ | $\Omega$ = |
| Un événement est une partie de $\Omega$ . | *A : « obtenir un numéro impair »*<br>*A* =<br>*B : « obtenir une boule rouge »*<br>B = |
| Un événement certain contient toutes les issues possibles. | *D : « obtenir un numéro inférieur à 10»*<br>*D* = |
| Un événement impossible ne se réalise jamais. | *E : « obtenir une boule verte »*<br>*E* = |
| La réunion de deux événements est l'ensemble des issues appartenant à l'un ou à l'autre (au moins l'un des deux) | $A \cup B$ *: « obtenir une boule*<br>$A \cup B$ = |
| L'intersection de deux événements est l'ensemble des issues appartenant à l'un et à l'autre (aux deux en même temps) | $A \cap B$ *: « obtenir une boule*<br>$A \cap B$ = |
| Deux événements incompatibles n'ont aucune issue commune. | |
| Deux événements contraires sont deux événements incompatibles dont la réunion forme l'univers. | $\overline{A}$ *: « obtenir une boule*<br>$\overline{A}$ =<br>$A \cap \overline{A}$ = et $A \cup \overline{A}$ = |

Définition : La probabilité d'un événement est un nombre qui mesure les chances que cet événement a de se produire, sur une échelle qui va de 0 (pour l'événement impossible) à 1 (pour l'événement certain)

exemple: P(A) = P(B) = P(C) = P(D) =

P( $A \cap B$ ) = P( $A \cup B$ ) =

Définition: soit $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire. On définit une loi de probabilité sur $\Omega$ lorsque : $\begin{cases} \text{à chaque } x_i \text{ on associe sa propbalité } p(x_i) \\ p(x_1) + p(x_2) + ... + p(x_n) = 1 \end{cases}$

Remarque : Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences mesurées sur des séries de taille *n* se rapprochent de la loi de probabilité quand *n* devient grand.

Pour $\Omega = \{R1; R2; R3; R4; B5; B6; B7\}$, la loi de probabilité sur $\Omega$ est donnée par:

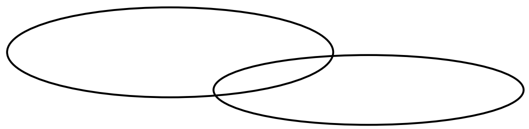
Si $\Omega = \{R; B\}$

## II. Propriétés

Soient A et B deux événements de $\Omega$ .

$p(\varnothing) = 0$ $p(\Omega) = 1$ $0 \leq p(A) \leq 1$

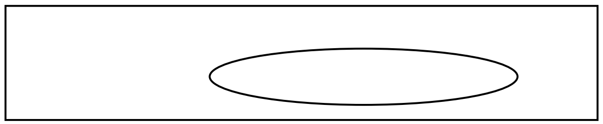
$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$



exemple:

Rem : si A et B sont deux événements incompatibles alors: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

$\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$



exemple:

Si chaque événement élémentaire est équiprobable (de même probabilité) alors :

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de A}}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}}$$

exemple:

## III Partition de l'univers

Une classe de 36 élèves âgés de 16, 17 ou 18 ans comprend 22 garçons dont 18 âgés de 17 ans et 3 âgés de 18 ans. D'autre part, il y a 6 filles âgées de 18 ans et une seule âgées de 16 ans. Le professeur de mathématiques interroge un élève au hasard.

| | **Garçon** | **Fille** | **Total** |
|---|---|---|---|
| **16 ans** | | | |
| **17 ans** | | | |
| **18 ans** | | | |
| **Total** | | | |

On considère les événements :

G : « l'élève interrogé est un garçon. »

F : « l'élève interrogé est une fille. »

A : « l'élève interrogé a 16 ans. »

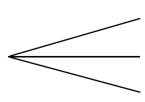
B : « l'élève interrogé a 17 ans. »

C : « l'élève interrogé a 18 ans. »

$A \cap B =$ ; $A \cap C =$ ; $B \cap C =$ ; $A \cup B \cup C =$

Définition : on dit que les événements A, B, C forment une **partition** de $\Omega$

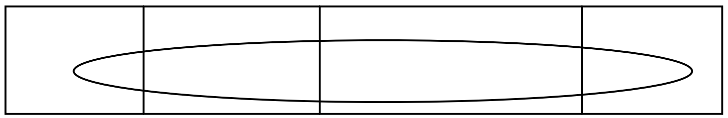
On peut alors construire la première ramification d'un arbre de probabilité:



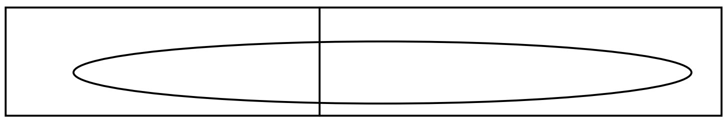

$P(F \cap A) =$ ; $P(F \cap B) =$ ; $P(F \cap C) =$ et $P(F) =$

Propriété : Si B1, B2, … , Bn forment une partition de $\Omega$, alors pour tout événement A, on a : P(A) =

C'est la formule des probabilités totales.



Corollaire : Soit A et B deux événements : $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$



## IV Variable aléatoire

Définition: Lorsqu'à chaque événement élémentaire de Ω on associe **un nombre réel**, on dit que l'on définit une **variable aléatoire** sur Ω. On la note en général X.

Exemple : on lance un dé équilibré, $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ . Si on obtient 6 on gagne 7 € sinon on perd 2€. On note X le gain (ou la perte).

Evènement définis à partir d'une variable aléatoire : Si X est une variable aléatoire et *k* un réel , alors « X prend la valeur *k* » est un événement constitué des issues associées au nombre *k*. On le note (X = *k*)

Exemple: (X=7)= (X=-2)= (X=0)=

Loi de probabilité d'une variable aléatoire : c'est donner la probabilité des évènements (X=*k*) pour toutes les valeurs de *k* possibles.

Exemple: On présente parfois la loi sous la forme d'un tableau :

| *k* | 7 | -2 |
|---|---|---|
| P(X=*k*) | | |

Représentation graphique : sur les abscisses figurent les valeurs prises par la variable aléatoire, sur les ordonnées les probabilités correspondantes.

## V Espérance mathématique

On peut considérer les probabilités comme des « fréquences théoriques ». Ainsi on peut remplacer, dans les formules de la moyenne et de la variance utilisées en statistiques, les fréquences ( $f_i$ ) par les probabilités ( $p_i$ ) où $p_i = P(X = x_i)$.

**Définitions** : **L'espérance** d'une variable aléatoire discrète est donnée par :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \text{ i.e. } \boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{n} p_ix_i}$$

**La variance** d'une variable aléatoire discrète est donnée par :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + ... + p_n(x_n - E(X))^2 \text{ i.e. } \boxed{V(X) = \sum_{k=1}^{n} (E(X) - x_i)^2 p_i}$$

$$V(X) = p_1x_1^2 + ... + p_nx_n^2 - (E(X))^2 \text{ i.e. } \boxed{V(X) = \sum_{k=1}^{n} x_i^2 p_i - (E(X))^2}$$

**Exemple** : avec le jeu de dé précédent on a E=

et V=

Le jeu n'est pas équitable : sur un très grand nombre de lancers on perd en moyenne …€ par lancer. Les écarts à cette moyenne sont de l'ordre de