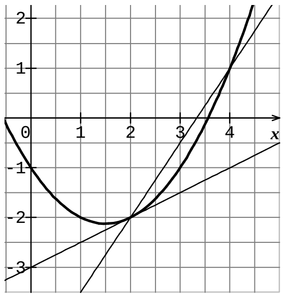
Nombre dérivé et fonction dérivée

I. Nombre dérivé



Soit f une fonction numérique et a un nombre réel appartenant à l'ensemble de définition de f.

Le nombre dérivé de f en a, noté $f\,'(a)$, est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

Ainsi, le nombre dérivé de f en a est la limite (si elle existe) du taux de variation de f en a :

$$\boxed{f\,'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

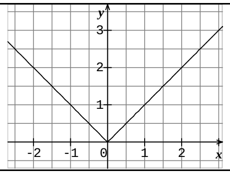
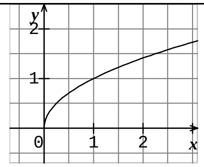
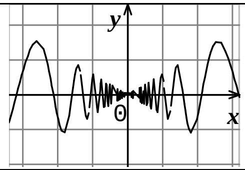
La fonction f est dite dérivable en a si le nombre dérivé de f en a existe.

Exemple : soit f représentée ci-contre. Coefficient directeur de la sécante tracée :

Coefficient directeur de la tangente tracée : Conséquence : $f\,'(\ldots)=\ldots$

Remarques : en sciences physiques on utilise souvent la notation : $\frac{\partial f}{\partial x}(a)=f\,'(a)$

Exemples de fonctions non dérivables en 0 :

$x\mapsto \lvert x\rvert$	$x\mapsto\sqrt{x}$	$x\mapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $0\mapsto 0$
		

Propriétés: si la fonction f est dérivable en a alors la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a a pour équation: $\boxed{y=f\,'(a)(x-a)+f(a)}$

au voisinage de a on a : $\boxed{f(x)\approx f(a)+f\,'(a)(x-a)}$

II. Fonction dérivée

Définition : soit I un intervalle si f est dérivable pour tout nombre $x\in I$, alors la fonction $x\mapsto f\,'(x)$ est définie sur I et appelée la fonction dérivée de f, notée $f\,'$.

Soient $k\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$

Dérivation

ensemble de définition	$f(x)=\ldots$	$f'(x)=\ldots$
$\mathbb{R}$	k	0
$\mathbb{R}$	x	1
$\mathbb{R}$	x^n	nx^{n-1}
$]0;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$

Exemples : $(x^3)'=\ldots$ $\left(\frac{1}{x^3}\right)'=$

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Dérivation

ensemble de dérivabilité	$f(x)=\ldots$	$f'(x)=\ldots$
I	$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
I	$k\times u(x)$	$k\times u'(x)$
I	$u(x)\times v(x)$	$u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$
$\{x\in I \mid u(x)\neq 0\}$	$\frac{1}{u(x)}$	$\frac{-u'(x)}{(u(x))^2}$
$\{x\in I \mid v(x)\neq 0\}$	$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}$

Exemples : soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+2x-2$ alors $f\,'(x)=\ldots$

Si $g(x)=(2x+3)\times\cos(x)$ alors $g\,'(x)=$ Si $h(x)=\frac{\cos(x)}{2x+3}$ alors …

Théorème : soient a et b deux nombres réels et u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I alors la fonction f définie par $\boxed{f(x)=u(ax+b)}$ est dérivable sur l'ensemble $\{x\in\mathbb{R} \mid ax+b\in I\}$ et $\boxed{f\,'(x)=a\times u'(ax+b)}$

Démo : pour $x\neq x_0$, $\frac{u(ax+b)-u(ax_0+b)}{x-x_0}=a\times\frac{u(ax+b)-u(ax_0+b)}{ax+b-(ax_0+b)}$ donc…

Si $f(x)=\sqrt{2x+3}$ alors pour $x\in\ldots$, $f\,'(x)=\ldots$

Si $f(x)=\cos(-3x+5)$ alors … Si $f(x)=(2x+3)^5$ alors …

III. Signe de la dérivée et sens de variation de la fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f\,'$ est (strictement) positive sur I alors f est (strictement) croissante sur I
- Si $f\,'$ est nulle sur I alors f est constante sur I
- Si $f\,'$ est (strictement) négative sur I alors f est (strictement) décroissante sur I

x	
signe de $f\,'(x)$	
variations de f	

Propriétés : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I.
Si $f(a)$ est un extremum local de f sur I alors $f\,'(a)=0$
Si $f\,'$ s'annule en $x=a$ en **changeant de signe** alors $f(a)$ est un extremum local de f sur I

Exemple :

☞ $f\,'(a)=0$ est insuffisant pour annoncer que $f(a)$ est un extremum local

exemple : soit $f(x)=x^3$, $f\,'(x)=3x^2$ donc $f\,'(0)=0$ mais 0 n'est pas un extremum local pour f.