Nombres complexes 1 (M-3.1)

I. Définitions

<u>Définition de l'ensemble des nombres complexes</u> : soit i un nombre <u>non réel</u> tel que $i^2=-1$. Les nombres complexes sont les nombres pouvant s'écrire sous la forme $a+bi$ où a et b sont <u>deux nombres réels</u>.

Exemples de nombres complexes :

2+3i pour a = ... et b = ...	$2-4$ i pour a = ... et b = ...	$-3+i$ pour a = ... et b =
$0{,}1+\frac{1}{3}$ i pour a = ... et b = ...	2 pour a = ... et b = ...	3i pour a = ... et b = ...

Remarques : tout nombre réel peut être considéré comme un nombre complexe car : a = ... + ... i

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$. On appelle $a+bi$ la <u>forme algébrique</u> d'un nombre complexe.

En électricité ou en électronique le nombre complexe i est noté j .

<u>Définition de la partie réelle et de la partie imaginaire d'un nombre complexe</u> : soit un nombre complexe z donné sous forme algébrique : $z = a + bi$. Alors :

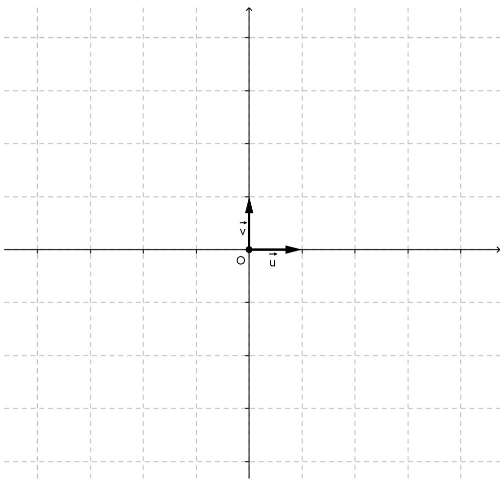
le nombre réel a est appelé <u>partie réelle</u> du nombre complexe z et on note $\mathrm{Re}(z) = a$

le nombre réel b est appelé <u>partie imaginaire</u> du nombre complexe z et on note $\mathrm{Im}(z) = b$

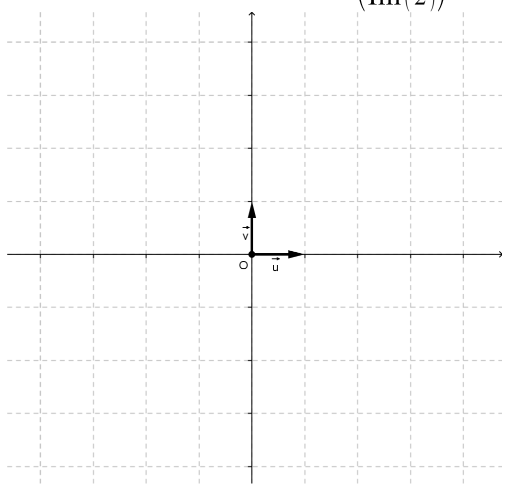
Exemples : Re(2+3i) = ... Im(2+3i) = ... Re(5) = ... Im(5) = ...

<u>Représentation graphique d'un nombre complexe</u> : le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Tout nombre complexe z peut-être représenté graphiquement :

ou bien par le point $M(\mathrm{Re}(z);\mathrm{Im}(z))$



ou bien par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(z)\\\mathrm{Im}(z)\end{pmatrix}$

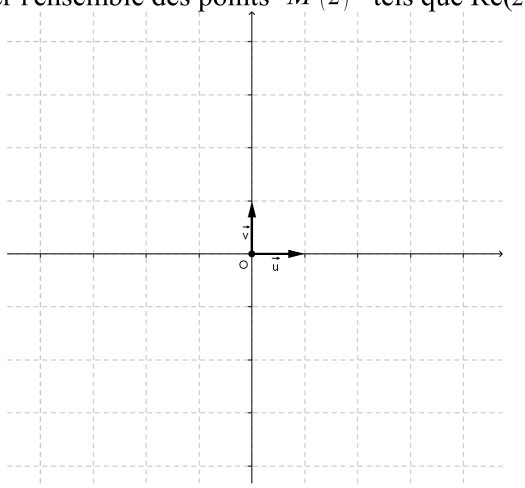


Réciproquement, pour tout point $M(a;b)$ (ou vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$) du plan, il existe un nombre complexe $z = a + bi$ appelé <u>affixe</u> du point M (ou du vecteur $\vec{v}$) et on note $M(z)$ (ou $\vec{v}(z)$)

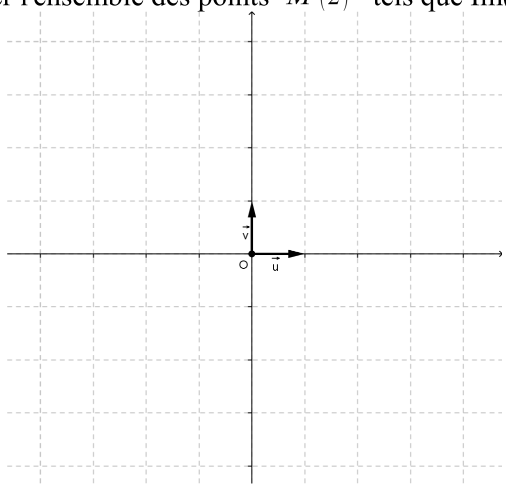
Remarque : la partie réelle est assimilée à une abscisse, la partie imaginaire est assimilée à une ordonnée.

Application : lignes de niveaux des fonctions Re et Im

Tracer l'ensemble des points $M(z)$ tels que Re(z)=2



Tracer l'ensemble des points $M(z)$ tels que Im(z)=2



Remarques : $\{M(z) | \mathrm{Re}(z)=0\}$ est l'axe des ...., aussi appelé axe des imaginaires purs.

$\{M(z) | \mathrm{Im}(z)=0\}$ est l'axe des ...., aussi appelé axe des réels.

II. Opérations sur les nombres complexes

On considère deux nombres complexes $a+b\mathrm{i}$ et $a'+b'\mathrm{i}$ écrits sous forme algébrique.

Égalité de deux nombres complexes : $a+b\mathrm{i}=a'+b'\mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$

Exemple : $a+b\mathrm{i}=2+3\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=\dots \\ b=\dots \end{cases}$

Remarque : on peut donc affirmer que l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique est unique.

Somme de deux nombres complexes : l'addition de deux nombres complexes suit les même règles que celles de l'addition de deux nombres réels.

Exemples : $(2+3\mathrm{i})+(4+5\mathrm{i})=\dots$ $\qquad (2+3\mathrm{i})+(4-5\mathrm{i})=$

$(2-3\mathrm{i})+(-2+3\mathrm{i})=\dots$ $\qquad 2\mathrm{i}+(3+4\mathrm{i})=$

Remarque : en particulier l'opposé d'un nombre complexe est donné par : $-(a+b\mathrm{i})=\dots$

Produit d'un nombre complexe par un nombre réel k : on applique la règle de distributivité.

Exemples : $2(3+4\mathrm{i})=$ $\qquad -3(2-\mathrm{i})=$

$\dfrac{2+3\mathrm{i}}{4}=\dfrac{1}{4}(\dots\dots\dots\dots)=$ $\qquad \sqrt{2}(3+\sqrt{8}\mathrm{i})=$

Remarque : en courant est alternatif, on peut utiliser les nombres complexes en électricité ou en électronique.
Soit U la tension efficace, $\omega=2\pi f$ la pulsation, et φ la phase initiale alors la tension réelle au cours du temps $u(t)=U\sqrt{2}\cos(\omega t+\varphi)$ est associée au nombre complexe $\underline{U}=U(\cos(\varphi)+j\sin(\varphi))$

Produit de deux nombres complexes : la multiplication de deux nombres complexes suit les même règles que celles de la multiplication de deux nombres réels en appliquant la définition $\mathrm{i}^2=-1$

Exemples : $2\mathrm{i}(3+4\mathrm{i})=\dots$

$(2+3\mathrm{i})(4+5\mathrm{i})=\dots$

$(2+3\mathrm{i})(4-5\mathrm{i})=\dots$

Remarque : avec les notations précédentes, la tension $u(t)=U\sqrt{2}\cos(\omega t)$ et l'intensité $i(t)=I\sqrt{2}\cos(\omega t-\varphi)$ sont respectivement associée aux nombres complexes $\underline{U}$=U et $\underline{I}$= $I(\cos(-\varphi)+j\sin(-\varphi))$. L'impédance complexe $\underline{Z}$ du circuit vérifie alors : $\underline{U}$ = $\underline{Z}$ $\underline{I}$

Conjugué d'un nombre complexe : $\overline{a+b\mathrm{i}}=a-b\mathrm{i}$

Exemples : $\overline{2+3\mathrm{i}}$ =... $\qquad \overline{2-3\mathrm{i}}$ =... $\qquad \overline{2\mathrm{i}}$ =...

Remarque : $(a+b\mathrm{i})\overline{(a+b\mathrm{i})}=\dots$

Inverse d'un nombre complexe non nul : pour rendre le dénominateur réel, il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemples : $\dfrac{1}{3+4\mathrm{i}}=$ ...

$\dfrac{1}{2\mathrm{i}}=\dots$

Remarque : cette méthode permet de calculer le quotient de deux nombres complexes.

$\dfrac{1+2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}=\dots$

Conjugaison et opérations : soient deux nombres complexes z et $z'\neq 0$ alors :

$$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'} \qquad \overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'} \qquad \overline{zz'}=\overline{z}\ \overline{z'} \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

Exemples :

$\overline{(2+3\mathrm{i})}+\overline{(4+5\mathrm{i})}$ =

$\overline{(2+3\mathrm{i})}\ \overline{(4+5\mathrm{i})}$ = ...

$\dfrac{1}{\overline{3+4\mathrm{i}}}$ =...

$\dfrac{\overline{1+2\mathrm{i}}}{\overline{3+4\mathrm{i}}}=$ ...

III. Résolution des équations du second degré à coefficients réels

Lemme de factorisation dans $\mathbb{C}$: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$a^2+b^2=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})$

Théorème : soient $a\neq 0$, b et c trois nombres réels et le polynôme $P(z)=az^2+bz+c$ et le discriminant $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$.

Si $\Delta<0$ alors	Si $\Delta=0$ alors	Si $\Delta>0$ alors
le polynôme P admet deux racines complexes z_1 et z_2 conjuguées : $\boxed{z_1=\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}}$ et $\boxed{z_2=\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}}$ Et pour tout $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=a(z-z_1)(z-z_2)$	le polynôme P admet une racine réelle double x_0 telle que : $\boxed{x_0=-\frac{b}{2a}}$ Et pour tout $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=(z-x_0)^2$	le polynôme P admet deux racines réelles x_1 et x_2 telles que : $\boxed{x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boxed{x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$ Et pour tout $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=a(z-x_1)(z-x_2)$

Démonstration : $az^2+bz+c=a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}+\frac{c}{a}\right)=\ldots$

Exemples : $P_1(z)=2z^2+3z-2$

$P_2(z)=2z^2+3z+\frac{9}{8}$

$P_3(z)=2z^2+3z+2$

Remarque : ces résultats sont utilisés dans la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.