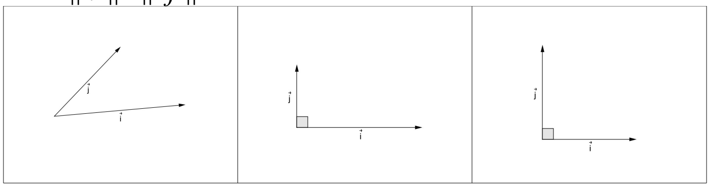
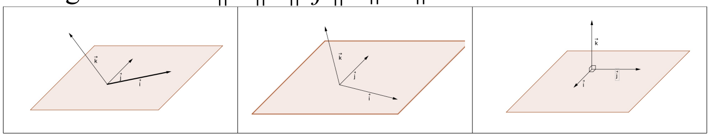
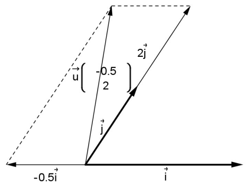
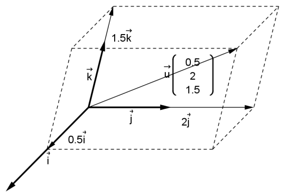
Calcul vectoriel (M-3.1)

I. Les vecteurs

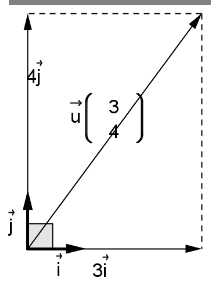
Vecteurs du plan	Vecteurs de l'espace
<u>Base du plan</u> : une base des vecteurs du plan est un couple de vecteurs $(\vec{i}\,;\vec{j})$ tel que les vecteurs ne soient <u>pas colinéaires</u>. (i.e. $\vec{i} \neq \vec{0}$, $\vec{j} \neq \vec{0}$ et les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ n'ont pas la même direction). Une base $(\vec{i}\,;\vec{j})$ est <u>orthogonale</u> si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux. Une base $(\vec{i}\,;\vec{j})$ est <u>orthonormale</u> si elle est orthogonale et si $\Vert\vec{i}\Vert=\Vert\vec{j}\Vert=1$. 	<u>Base de l'espace</u> : une base des vecteurs de l'espace est un triplet de vecteurs $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ tel que les vecteurs ne soient <u>pas coplanaires</u> (i.e. $\vec{i} \neq \vec{0}$, $\vec{j} \neq \vec{0}$, $\vec{k} \neq \vec{0}$ et leurs directions ne peuvent pas être contenues dans un même plan) Une base $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ est <u>orthogonale</u> si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, $\vec{i}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux. Une base $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ est <u>orthonormale</u> si elle est orthogonale et si $\Vert\vec{i}\Vert=\Vert\vec{j}\Vert=\Vert\vec{k}\Vert=1$ 
<u>Coordonnées d'un vecteur dans une base</u> : soit $(\vec{i}\,;\vec{j})$ une base de vecteurs du plan. Pour tout vecteur du plan il existe un unique couple de réels $(x\,;y)$ tel que $\vec{v}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$ Pour tout couple de réels $(x\,;y)$, il existe un unique vecteur $\vec{v}$ du plan tel que $\vec{v}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$ On note alors : $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 	<u>Coordonnées d'un vecteur dans une base</u> : soit $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ une base de vecteurs de l'espace. Pour tout vecteur de l'espace il existe un unique triplet de réels $(x\,;y\,;z)$ tel que $\vec{v}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ Pour tout couple de réels $(x\,;y\,;z)$, il existe un unique vecteur $\vec{v}$ du plan tel que $\vec{v}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ On note alors : $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ 
<u>Addition de deux vecteurs :</u> soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et le vecteur somme $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ si $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et alors $\vec{w}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ Exemple : si $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ alors	<u>Addition de deux vecteurs :</u> soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et le vecteur somme $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors $\vec{w}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$
<u>Multiplication d'un vecteur par un réel</u> : soient $\vec{u}$ un vecteur du plan, k un réel, et le vecteur $\vec{w}=k\,\vec{u}$ si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ alors $\vec{w}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$ Exemples : si $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ alors $3\,\vec{u}$	<u>Multiplication d'un vecteur par un réel</u> :soient $\vec{u}$ un vecteur de l'espace, k un réel, et le vecteur $\vec{w}=k\,\vec{u}$ si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ alors $\vec{w}\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$ Exemples : si $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ alors $3\,\vec{u}$
<u>Colinéarité de deux vecteurs</u> : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\,\vec{v}$ ou un réel k' tel que $\vec{v}=k'\,\vec{u}$ Remarque : si $k\neq 0$ on a $k'=\dfrac{1}{k}$ Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur du plan. Remarque : deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.	<u>Colinéarité de deux vecteurs</u> : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\,\vec{v}$ ou un réel k' tel que $\vec{v}=k'\,\vec{u}$ Remarque : si $k\neq 0$ on a $k'=\dfrac{1}{k}$ Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur de l'espace.
<u>Critère de colinéarité</u> : $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-x'y=0$	<u>Critère de colinéarité</u> : deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Remarque le nombre $xy'-x'y=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ est appelé déterminant du couple de vecteurs $(\vec{u}\,;\vec{v})$ dans la base $(\vec{i}\,;\vec{j})$

Exemple : les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}13\\5\end{pmatrix}$ ...

<u>Norme d'un vecteur</u> : dans une base orthonormale $(\vec{i}\,;\vec{j})$ la norme d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est donnée par

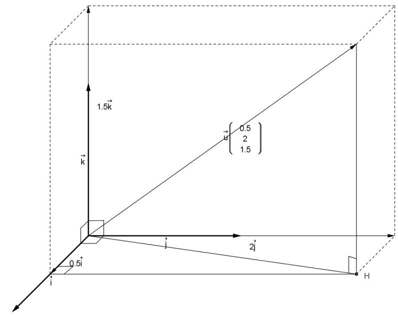
$$\boxed{\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}}$$



Exemple : les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\8\\13\end{pmatrix}$ ...

<u>Norme d'un vecteur</u> : dans une base orthonormale $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ la norme d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ est donnée par

$$\boxed{\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

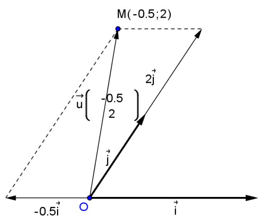


Remarque : un vecteur au sens mathématique du terme, est souvent appelé <u>vecteur libre</u> en sciences physiques.

Points du plan

<u>Repère du plan</u> : un repère du plan est un triplet $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ tel que O soit un point du plan (l'origine) et $(\vec{i}\,;\vec{j})$ une base des vecteurs du plan.

<u>Coordonnées d'un point</u> : soit M un point du plan et $(x\,;y)$ le couple de réels représentant ses coordonnées dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$: $M(x\,;y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$



<u>Coordonnées du vecteur défini par deux points :</u>

si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}}$

Démonstration : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

<u>Distance entre deux points</u> :
si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors

$$\boxed{AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}$$

<u>Milieu d'un segment</u> : soit M le milieu du segment [AB]

si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors $\boxed{M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)}$

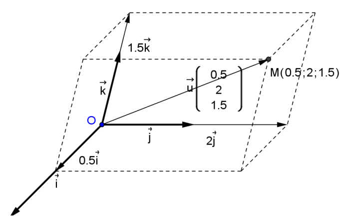
Démonstration :

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})=\dots$$

Points de l'espace

<u>Repère de l'espace</u> : un repère de l'espace est un quadruplet $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ tel que O soit un point de l'espace (l'origine) et $A(x_A;y_A;z_A)$ une base des vecteurs de l'espace.

<u>Coordonnées d'un point</u> : soit M un point de l'espace et $(x\,;y\,;z)$ le triplet de réels représentant ses coordonnées dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$: $M(x\,;y\,;z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$



<u>Coordonnées du vecteur défini par deux points :</u>

si $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ alors $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}}$

Démonstration : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

<u>Distance entre deux points</u> :
si $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ alors :

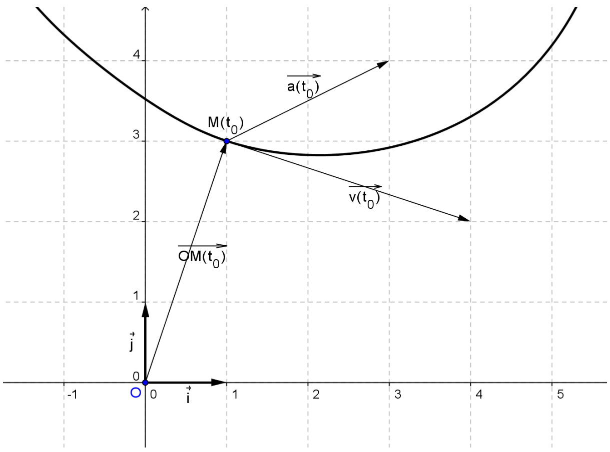
$$\boxed{AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$$

<u>Milieu d'un segment</u> : soit M le milieu du segment [AB]
si $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ alors

$$\boxed{M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)}$$

Remarque : les coordonnées du milieu d'un segment sont les moyennes des coordonnées des extrémités du segment.
Exemple : Si A(1;2;-3) et B(4;-5;6) alors...

Point de vue cinématique : on considère un point mobile $M(t)$ dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.



Le vecteur position est alors le vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$.

Le vecteur vitesse est le vecteur $\overrightarrow{v(t)}=\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t}$

La quantité de mouvement d'un point $M(t)$ de masse m vecteur vitesse $\overrightarrow{v(t)}$ est le vecteur $\vec{p}=m\overrightarrow{v(t)}$

Le vecteur accélération est le vecteur $\overrightarrow{a(t)}=\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v(t)}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t^2}$

Point de vue dynamique : la donnée d'un point et d'un vecteur est appelée vecteur lié. C'est le cas, par exemple, pour un vecteur force (le point d'application et le vecteur définissant la direction, le sens, et l'intensité de la force)

II. Les barycentres

Définition du barycentre de deux points pondérés : soient A et B deux points (du plan ou de l'espace) affectés respectivement de coefficients réels a et b.

Si $a+b\neq 0$ alors le barycentre G du système $\{(A;a),(B,b)\}$ est l'unique point tel que $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

Démonstration de l'existence et de l'unicité :

$$a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{GA}+b(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0} \Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$$

Exemple : Placer $G=\mathrm{Bar}\{(A;1);(B;2)\}$

Placer $H=\mathrm{Bar}\{(A;3);(B;-1)\}$

Remarque : le barycentre de deux points A et B distincts appartient à la droite (AB).

Point de vue cinématique : le centre d'inertie d'un ensemble de points matériels est le barycentre de ces points affectés de de leur masse.

Point de vue dynamique : le centre de gravité d'un ensemble de points matériels est le barycentre de ces points affectés de de leur poids.

Homogénéité du barycentre : soient A et B deux points (du plan ou de l'espace) affectés respectivement de coefficients réels a et b tels que $a+b\neq 0$.

Pour tout réel $k\neq 0$, $\mathrm{Bar}\{(A;a),(B,b)\}=\mathrm{Bar}\{(A;ka),(B,kb)\}$

Exemple : $\mathrm{Bar}\{(A;3);(B;6)\}=\ldots$ $\qquad$ $\mathrm{Bar}\{(A;-3);(B;1)\}=\ldots$

Propriété caractéristique : soient A et B deux points (du plan ou de l'espace) affectés respectivement de coefficients réels a et b tels que $a+b\neq 0$.

$G=\mathrm{Bar}\{(A;a);(B;b)\}$ $\Leftrightarrow$ pour tout point M (du plan ou de l'espace), $(a+b)\overrightarrow{MG}=a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}$

Démonstration : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Leftrightarrow a(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA})+b(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB})=\vec{0} \Leftrightarrow \ldots$

Coordonnées du barycentre deux points pondérés : soient A et B deux points (du plan ou de l'espace) affectés respectivement de coefficients réels a et b tels que $a+b\neq 0$ et $G=\mathrm{Bar}\{(A;a);(B;b)\}$

dans le plan : $G\left(\dfrac{a x_A+b x_B}{a+b};\dfrac{a y_A+b y_B}{a+b}\right)$ $\qquad$ dans l'espace : $G\left(\dfrac{a x_A+b x_B}{a+b};\dfrac{a y_A+b y_B}{a+b};\dfrac{a z_A+b z_B}{a+b}\right)$

Démonstration : la propriété caractéristique appliquée au point O donne : $(a+b)\overrightarrow{OG}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$

Remarque : les coordonnées du barycentre sont obtenues en effectuant des moyennes pondérées des coordonnées des points.

Définition du barycentre de trois points pondérés : soient A, B et C trois points (du plan ou de l'espace) affectés respectivement de coefficients réels a, b et c.

Si $a+b+c\neq 0$ alors le barycentre G du système $\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ est l'unique point tel que $a\,\overrightarrow{GA}+b\,\overrightarrow{GB}+c\,\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

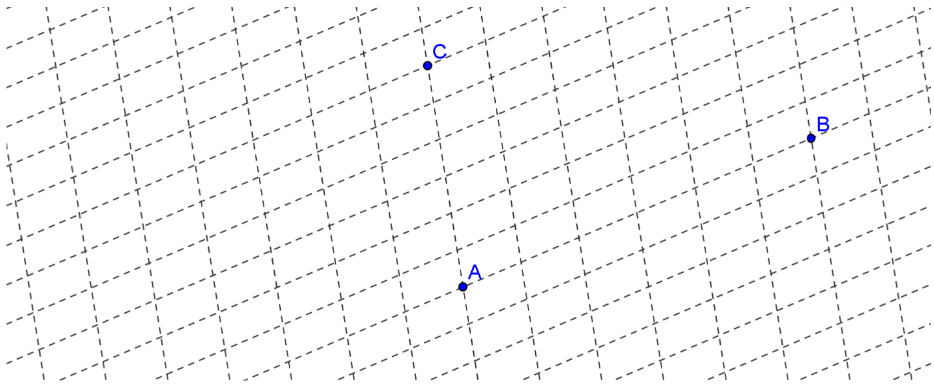
Remarque : les propriétés valables pour deux points restent vérifiées pour trois points. En particulier la propriété caractéristique devient :

$G=\text{Bar}\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ ⇔ pour tout point M, $(a+b+c)\overrightarrow{MG}=a\,\overrightarrow{MA}+b\,\overrightarrow{MB}+c\,\overrightarrow{MC}$ avec $a+b+c\neq 0$

Application :

Placer $G=\text{Bar}\{(A;1);(B;2);(C;3)\}$

Placer $H=\text{Bar}\{(A;1),(B;-2);(C;3)\}$



<u>Coordonnées du barycentre trois points pondérés</u> : soient A, B et C trois points (du plan ou de l'espace) affectés respectivement de coefficients réels a , b et c tels que $a+b+c\neq 0$ et $G=\text{Bar}\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$

dans le plan :

$$G\left(\frac{a\,x_A+b\,x_B+c\,x_C}{a+b+c};\frac{a\,y_A+b\,y_B+c\,y_C}{a+b+c}\right)$$

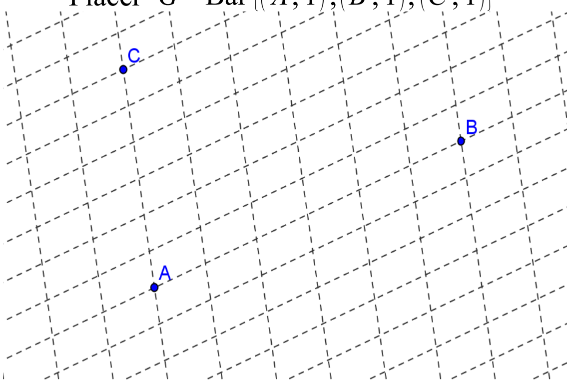
dans l'espace :

$$G\left(\frac{a\,x_A+b\,x_B+c\,x_C}{a+b+c};\frac{a\,y_A+b\,y_B+c\,y_C}{a+b+c};\frac{a\,z_A+b\,z_B+c\,z_C}{a+b+c}\right)$$

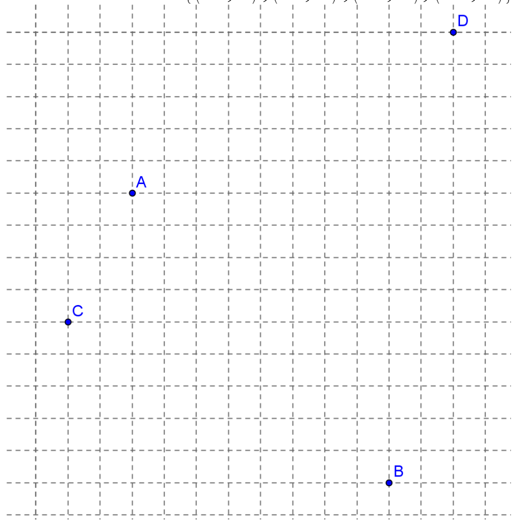
Ces règles sont généralisables pour travailler sur le barycentre de n points du plan ou de l'espace. Dans ce cas il est efficace de pouvoir construire des "barycentres intermédiaires".

<u>Associativité du barycentre</u> : le barycentre de n points pondérés n'est pas modifié en remplaçant p de ces points par leur barycentre G' affecté de la somme de leur p coefficients.
Remarque : pour que les barycentres existent il faut toujours que la somme des coefficients soit non nulle!

Placer $G=\text{Bar}\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$

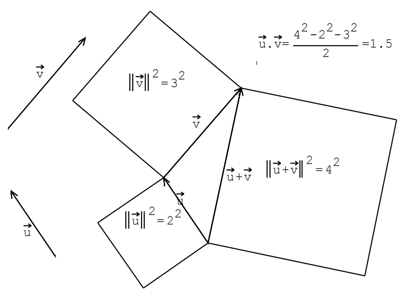


Placer $H=\text{Bar}\{(A;1),(B;2);(C;3);(D;4)\}$



III. Le produit scalaire

<u>Définition du produit scalaire de deux vecteurs</u> : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs (du plan ou de l'espace). Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ tel que : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$



Remarques : $\vec{0}\cdot\vec{u}=0$

$\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$ on note parfois $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^{\,2}$ le carré scalaire du vecteur $\vec{u}$

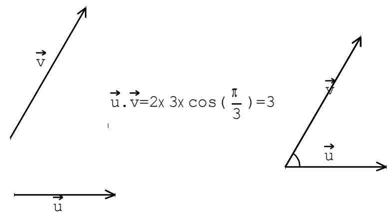
D'après le théorème de Pythagore et sa réciproque :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

Point de vue cinématique et dynamique :
Le travail (une énergie) d'une force constante $\vec{F}$ sur le trajet [AB] est donné par le réel W= $\vec{F}\ .\ \vec{AB}$
La puissance (dérivée temporelle de l'énergie) d'une force $\vec{F}$ s'appliquant sur un point mobile ayant pour vecteur vitesse $\vec{v}$ est donnée par le réel P= $\vec{F}\ .\ \vec{v}$

Propriété du cosinus : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls (du plan ou de l'espace) et l'angle $\theta=(\vec{u}\,;\vec{v})\ [2\pi]$:

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\theta)}$$

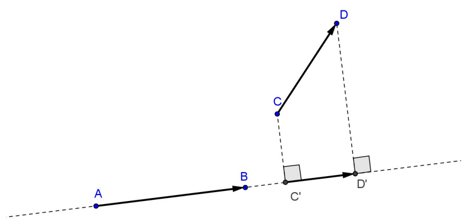


Remarque : cette relation peut permettre de déterminer l'angle géométrique entre deux vecteurs connaissant leur norme et leur produit scalaire :

$$\boxed{\cos(\theta)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}}$$

Exemple : si $\|u\|=4$, $\|v\|=\sqrt{3}$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=6$ alors...

Propriété du projeté orthogonal : soient A, B , C et D quatre points du plan ou de l'espace. On considère les points C' et D' projetés orthogonaux des points C et D sur la droite (AB), alors : $\boxed{\vec{AB}\cdot\vec{CD}=\vec{AB}\cdot\vec{C'D'}}$



si $\vec{AB}$ et $\vec{C'D'}$ ont le même sens :	si $\vec{AB}$ et $\vec{C'D'}$ sont de sens contraire:
$\vec{AB}\cdot\vec{CD}=AB\times C'D'$	$\vec{AB}\cdot\vec{CD}=-AB\times C'D'$

Remarque : on retrouve ici la notion de travail moteur ou résistant.

Produit scalaire et coordonnées : le plan ou l'espace étant munis d'une base orthonormée.

si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$	si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

Remarque : dans une base orthonormale $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$, l'abscisse du vecteur $\vec{u}$ est $\vec{u}\cdot\vec{i}$.

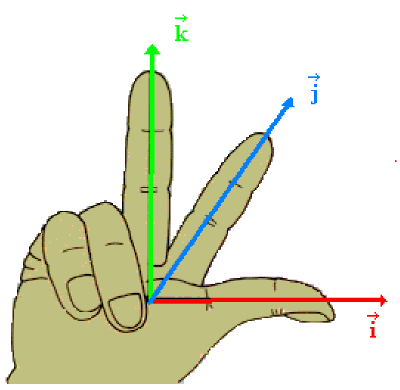
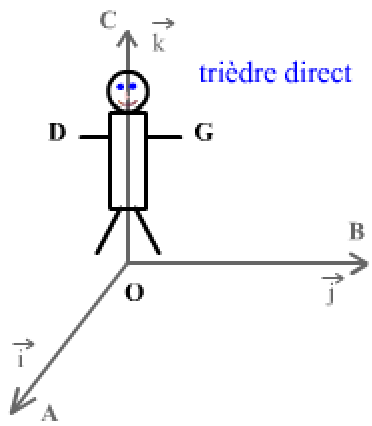
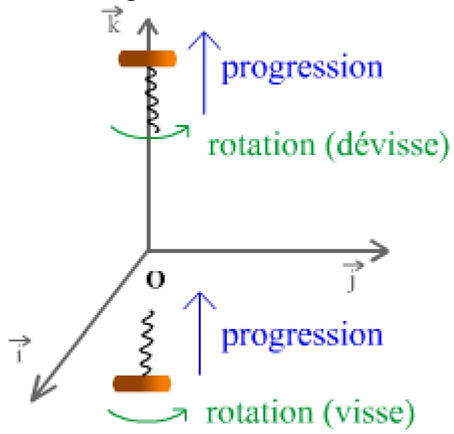
Opérations sur le produit scalaire : soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs (du plan ou de l'espace) et k un réel.

symétrie : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
homogénéité : $(k\,\vec{u})\cdot\vec{v}=k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$
additivité : $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

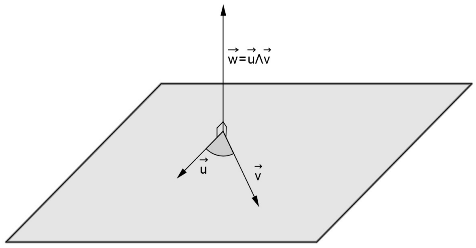
Remarque : on dit que le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique. Dans la pratique on peut assimiler ces règles à une forme de distributivité.

III. Le produit vectoriel

Le cadre d'application du produit vectoriel est l'espace.
Une base de l'espace $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ est dite directe s'il elle vérifie l'une des trois règles équivalentes suivantes :

Règle de "la main droite"	Règle du "bonhomme d'Ampère"	Règle du "tire-bouchon"
		

Remarque : dans ce cas, la base $(\vec{j}\,;\vec{i}\,;\vec{k})$ est de sens indirect.



<u>Définition du produit vectoriel</u> : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ tel que :
si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : $\vec{w}=\vec{0}$

si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $\begin{cases}\text{le vecteur } \vec{w} \text{ est orthogonal à } \vec{u}\\ \text{le vecteur } \vec{w} \text{ est orthogonal à } \vec{v}\\ \text{la base} (\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}) \text{est directe}\\ \|\vec{w}\|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times|\sin(\vec{u}\,;\vec{v})|\end{cases}$

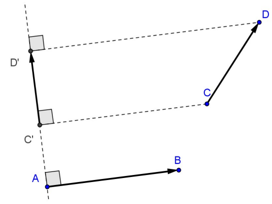
Remarque : le vecteur nul $\vec{0}$ étant colinéaire à tout vecteur, on a : $\vec{0}\wedge\vec{u}=\vec{0}$

<u>Point de vue cinématique</u> : le <u>moment cinétique</u> d'un point mobile $M(t)$ ayant une quantité de mouvement $\vec{p}$, évalué en O est le vecteur : $\overrightarrow{M}_0(M(t))=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}$
Le <u>moment dynamique</u> (ou moment des quantités d'accélération) est la dérivée temporelle du moment cinétique.
<u>Point de vue dynamique</u> : le <u>moment d'une force</u> $\vec{F}$ appliquée sur un point M, évalué en O est le vecteur $\overrightarrow{M}_0(\vec{F})=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}$

<u>Produit vectoriel et colinéarité</u> : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

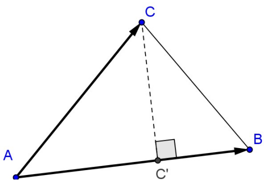
$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

<u>Produit vectoriel et projection orthogonale :</u>
Soient A, B, C et D quatre points de l'espace inclus dans un même plan. On considère les points C' et D' projetés orthogonaux des points C et D sur la droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point A.
Alors : $\boxed{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}\|=AB\times C'D'}$



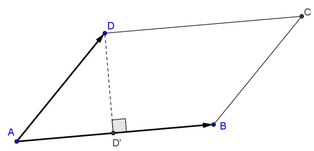
<u>Aire d'un triangle</u> : soit ABC un triangle et $\mathcal{A}_{ABC}$ son aire.

$$\mathcal{A}_{ABC}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$$



<u>Aire d'un parallélogramme</u> : soit ABCD un parallélogramme et $\mathcal{A}_{ABCD}$ son aire.

$$\mathcal{A}_{ABCD}=\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\|$$



<u>Opérations sur le produit vectoriel</u> : soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel.

Antisymétrie : $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$
Homogénéité : $(k\vec{u})\wedge\vec{v}=k(\vec{u}\wedge\vec{v})$
Additivité : $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$

<u>Produit scalaire et coordonnées</u> : l'espace est muni d'une <u>base orthonormale</u> directe $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}yz'-zy'\\zx'-xz'\\xy'-yx'\end{pmatrix}$

Remarque : une méthode permet de minimiser le risque d'erreur dans les permutations des coordonnées.

En ajoutant deux les premières composantes de chaque vecteur pour créer la matrice ci-contre, on calcule les déterminants successifs :

$$\begin{pmatrix}x & x'\\y & y'\\z & z'\\x & x'\\y & y'\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}x & x'\\ \end{matrix}\quad \begin{vmatrix}y & y'\\z & z'\end{vmatrix}=x_{\vec{u}\wedge\vec{v}}\quad \begin{matrix}x & x'\\y & y'\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}x & x'\\y & y'\end{matrix}\quad \begin{vmatrix}z & z'\\x & x'\end{vmatrix}=y_{\vec{u}\wedge\vec{v}}\quad \begin{matrix}y & y'\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}x & x'\\y & y'\\z & z'\end{matrix}\quad \begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}=z_{\vec{u}\wedge\vec{v}}$$

Exemple : si $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ alors ...