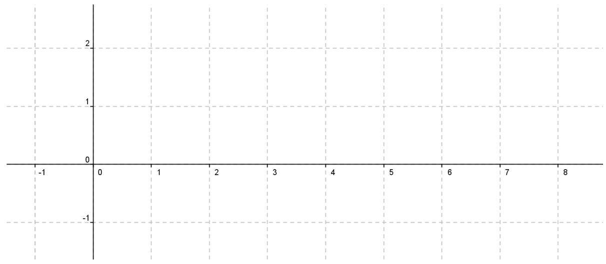
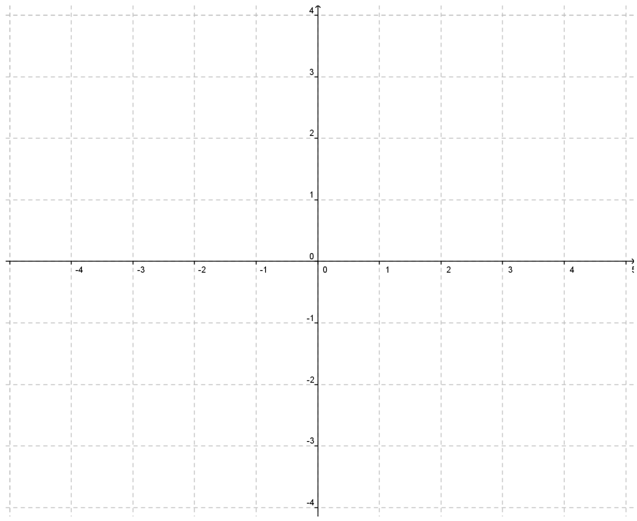
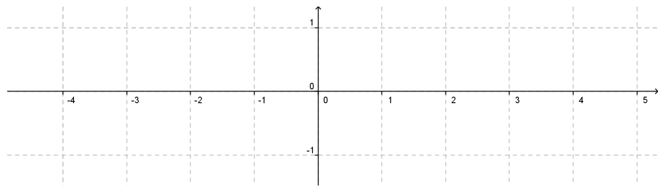
Fonctions d'une variable réelle (M-1.1)

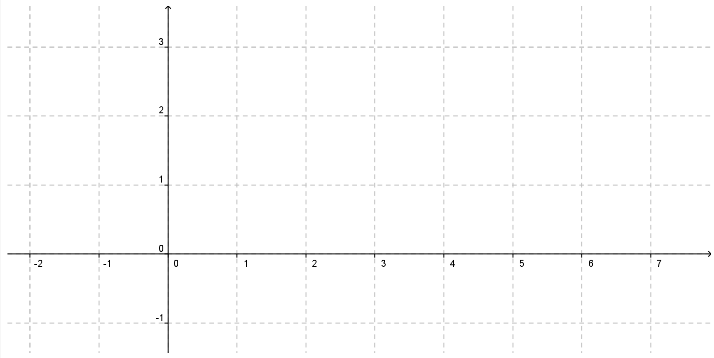
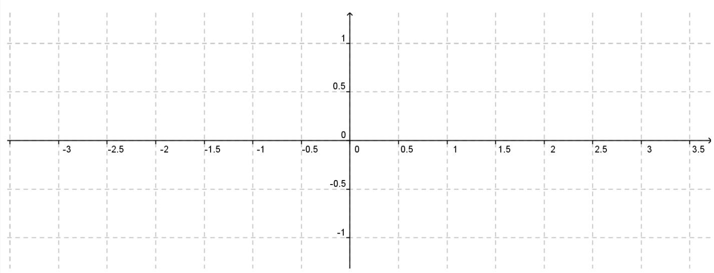
I. Fonctions définies par morceaux

<u>Définition des fonctions en escalier</u> : une fonction en escalier est une fonction constante par intervalles. Sa représentation graphique est constituée de segments parallèles à l'axe des abscisses.
Exemples :

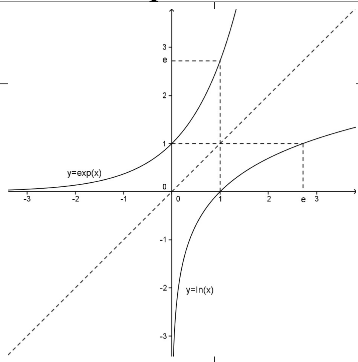
Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(t)=-1$ si $1\leqslant t<3$ et $f(t)=2$ sinon	
Soit E la fonction partie entière définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si $x\in[n;n+1[$ alors $E(x)=n$ On peut retenir : « $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x. »	
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(-1)^{E(x)}$	

Remarque : les fonctions en escalier peuvent présenter des points de discontinuité aux bords des intervalles.

<u>Définition des fonctions affines par morceaux</u> : une fonction affine par morceaux est affine par intervalles. Sa représentation graphique est constituée de segments.
Exemples :

Soit f la fonction définie sur $[1;6]$ par : $f(t)=-t+4$ si $1\leqslant t\leqslant 3$ $f(t)=2t-5$ si $3<t\leqslant 4$ $f(t)=-\frac{1}{2}t+3$ si $4<t\leqslant 6$ Remarque : la fonction f présente une discontinuité en $t=\ldots$	
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=(-1)^{E(x)}(x-E(x)-0,5)$ Remarque : la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$	

II. Fonctions exponentielle et logarithme népérien



Fonction exponentielle

La fonction exponentielle, notée exp, est l'unique solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ avec condition initiale : $\begin{cases} y'=y \\ y(0)=1 \end{cases}$

Conséquence pour tout réel x, $\exp'(x)=$... et exp(0)=...

Fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction qui à tout nombre réel strictement positif x fait correspondre l'antécédent de x par la fonction exp.

Conséquence : pour tout réel $x>0$:
$$\ln(x)=y \Leftrightarrow x=\mathrm{e}^y$$

<u>Exponentielle d'une somme</u> : pour tous réels a et b on a :
$$\exp(a+b)=\exp(a) \times \exp(b)$$
On note e le nombre d'Euler défini par : exp(1)= e

Ainsi pour tout entier relatif n, $\exp(n)=\mathrm{e}^n$

En étendant cette notation : $\boxed{\mathrm{e}^{a+b}=\mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b}$

Signe d'une exponentielle : pour tout réel a, $\mathrm{e}^a>0$

$\boxed{\mathrm{e}^{-a}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^a}}$ $\boxed{\mathrm{e}^{n\times a}=(\mathrm{e}^a)^n}$

$\boxed{\mathrm{e}^{a-b}=\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}}$ $\boxed{\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}^a}}$

Pour tout réel x, $\ln(\mathrm{e}^x)=x$

Pour tour réel $x>0$, $\mathrm{e}^{\ln(x)}=x$

En particulier, $\ln(1)=0$ et $\ln(\mathrm{e})=1$

<u>Logarithme népérien d'un produit</u> : pour tour réels $a>0$ et $b>0$, $\boxed{\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)}$

$\boxed{\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln(a)}$ $\boxed{\ln(a^n)=n\ln(a)}$

$\boxed{\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)}$ $\boxed{\ln(\sqrt{a})=\dfrac{1}{2}\ln(a)}$

<u>Dérivée de exp</u> : pour tout réel x, $\boxed{(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x}$

<u>Dérivée d'une fonction composée de exp</u> : soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur l'intervalle I et pour tout réel $x\in I$, $\boxed{(\mathrm{e}^{u(x)})'=u'(x)\times \mathrm{e}^{u(x)}}$

Exemples : $(\mathrm{e}^{2x+3})'=$

$(\mathrm{e}^{x^2})'=$

<u>Dérivée de ln</u> : pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$

<u>Dérivée d'une fonction composée de ln</u> : soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout $x\in I$, $u(x)>0$ alors la fonction $x\mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur l'intervalle I et $\boxed{(\ln(u(x)))'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}}$

Exemples : $\ln(2x+3)$ est dérivable pour ...

et $(\ln(2x+3))'=\ldots$

$\ln(x^2+1)'=$

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc pour tous réels *a* et *b*, $\mathrm{e}^a=\mathrm{e}^b \Leftrightarrow a=b$ et $\mathrm{e}^a<\mathrm{e}^b \Leftrightarrow a<b$

Limites de exp : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x=0^+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x=+\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
exp '(x)	+	
exp(x)	0 ↗	$+\infty$

La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc pour tous réels $a>0$ et $b>0$,
$$\ln(a)=\ln(b)\Leftrightarrow a=b \text{ et } \ln(a)<\ln(b)\Leftrightarrow a<b$$

Limites de ln : $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$

x	0	$+\infty$
ln '(x)	‖ +	
ln	‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$

III. Fonctions puissances d'exposant réel

Soient a un réel strictement positif et n un entier naturel : $a^n=(\mathrm{e}^{\ln(a)})^n=\mathrm{e}^{n\ln(a)}$

En étendant cette notation pour b un réel quelconque on a, $a^b=\mathrm{e}^{b\ln(a)}$

<u>Définition</u> : soit α un nombre réel, <u>la fonction puissance</u> α est la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+}*$ par : $x \mapsto x^\alpha$

Exemple: la fonction puissance $\dfrac{1}{2}$ est la fonction ...

La fonction puissance 0 est ...

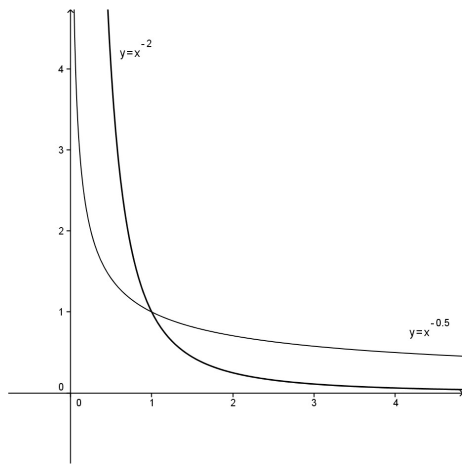
<u>Théorème</u> : soit $\alpha \in \mathbb{R}$ alors pour tout réel $x>0$, on a : $\boxed{(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}}$

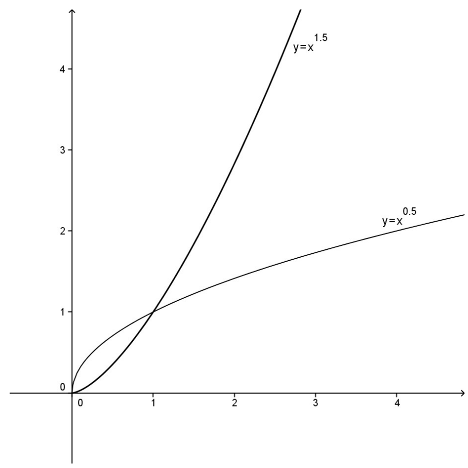
Démonstration : $(x^{\alpha})'=(e^{\alpha\ln(x)})'=\ldots$

<u>Corollaire</u> : soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout réel $x\in I$, $u(x)>0$

Alors la fonction $x \mapsto (u(x))^{\alpha}$ est dérivable sur l'intervalle I et pour tout $x \in$ I, on a : $\boxed{((u(x))^{\alpha})'=\alpha u'(x)(u(x))^{\alpha-1}}$

<u>Sens de variation et limites d'une fonction puissance :</u>

<table>
<tr><th>Si $\alpha<0$</th><th>Si $\alpha>0$</th></tr>
<tr>
<td>La fonction puissance α est strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+}*$
De plus : $\lim_{x\to 0^{+}} x^{\alpha}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}=0^{+}$
<table>
<tr><td>x</td><td>0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$(x^{\alpha})'$</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>x^{α}</td><td>$+\infty$ ↘ 0^{+}</td></tr>
</table>


</td>
<td>La fonction puissance α est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+}*$
De plus : $\lim_{x\to 0^{+}} x^{\alpha}=0^{+}$ et $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}=+\infty$
<table>
<tr><td>x</td><td>0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$(x^{\alpha})'$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>x^{α}</td><td>0^{+} ↗ $+\infty$</td></tr>
</table>


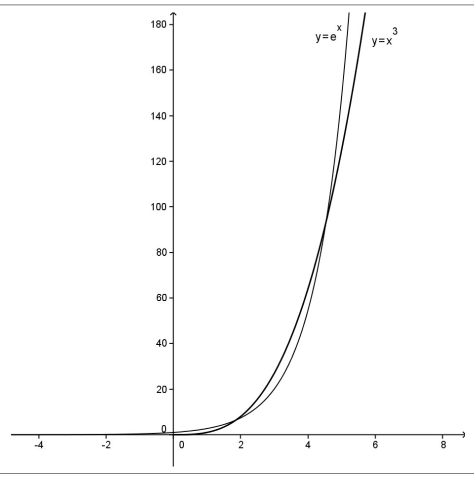
</td>
</tr>
</table>

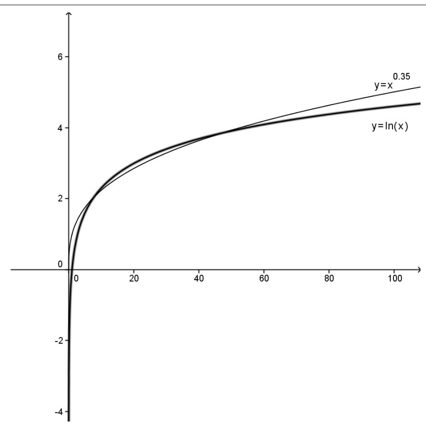
<u>Croissances comparées au voisinage de + ∞ :</u>

Soit $\alpha>0$, alors $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{\alpha}}=+\infty}$ et $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{\ln(x)}=+\infty}$

Remarque : on retenir "en + ∞ l'exponentielle l'emporte sur les puissances" et " en + ∞ les puissances l'emportent sur le logarithme népérien"

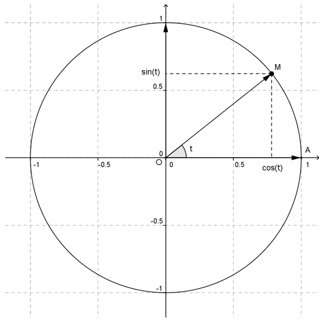
Exemples :

<table>
<tr><th>e^{x} vs x^{3}</th><th>$x^{0,5}$ vs $\ln(x)$</th></tr>
<tr>
<td>

</td>
<td>

</td>
</tr>
</table>

IV. Fonctions circulaires



Dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1 noté $\mathcal{U}$ et le point A(1;0). À tout réel t, on fait correspondre le point M du cercle $\mathcal{U}$ tel que : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})=t$ rad

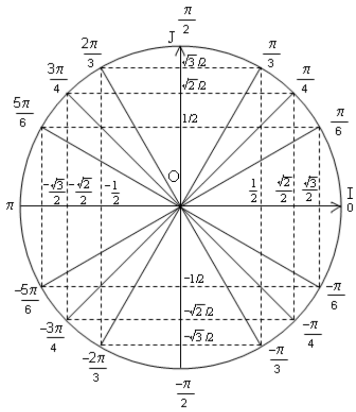
Alors le point M a pour coordonnées $M(\cos(t);\sin(t))$

Exemples : cos(0)=... et sin(0)=...

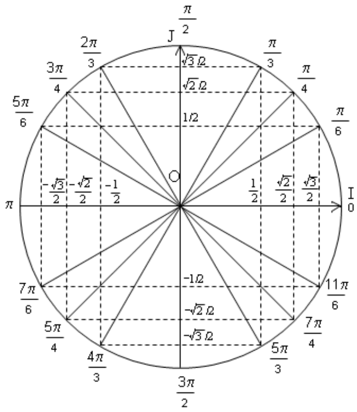
$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=$ ... et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ldots$

Valeurs remarquables des fonctions trigonométriques

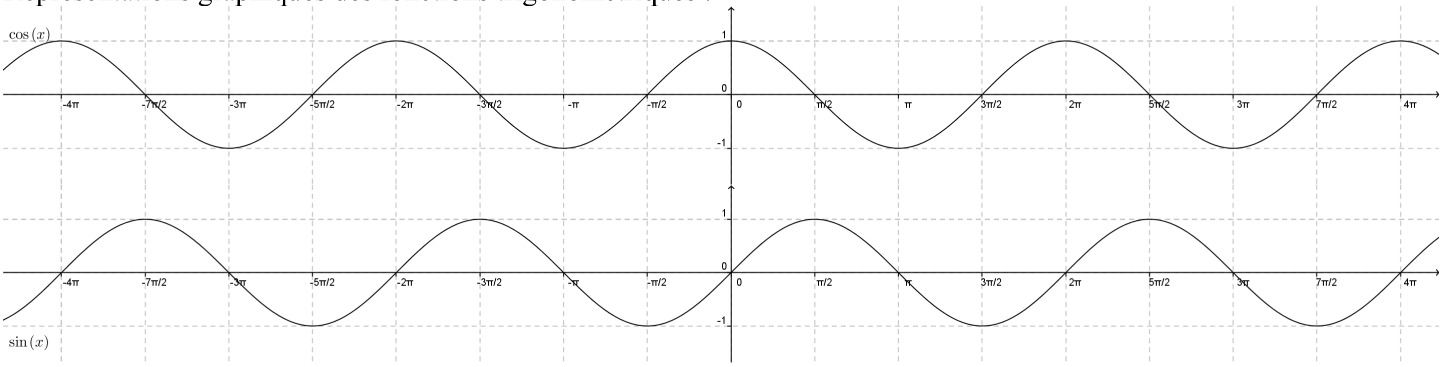
$[-\pi;\,\pi]$



$[0;2\pi]$



Représentations graphiques des fonctions trigonométriques :



Périodicité des fonctions trigonométriques :

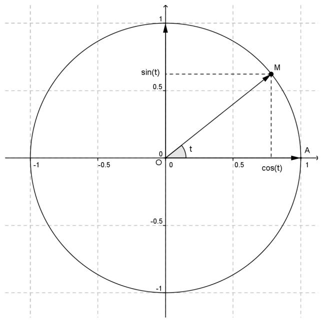
Les fonction sinus et cosinus sont 2π _périodiques : pour tout réel t, $\boxed{\cos(t+2\pi)=\cos(t)}$ et $\boxed{\sin(t+2\pi)=\sin(t)}$

Remarque : soit φ un réel fixé, les fonctions $t\mapsto\cos(t+\varphi)$ et $t\mapsto\sin(t+\varphi)$ ont pour période ...

Les fonctions $t\mapsto\cos(2\pi t+\varphi)$ et $t\mapsto\sin(2\pi t+\varphi)$ ont pour période ...

Soit $T>0$, les fonctions $t\mapsto\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$ et $t\mapsto\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$ ont pour période ...

Le nombre $\frac{2\pi}{t}=\omega$ est appelé pulsation.



Parité des fonctions trigonométriques :

La fonction cosinus est paire : pour tout réel t, $\boxed{\cos(-t)=\cos(t)}$

La représentation graphique de la fonction cosinus est donc symétrique par rapport ...

La fonction sinus est impaire : pour tout réel t, $\boxed{\sin(-t)=-\sin(t)}$

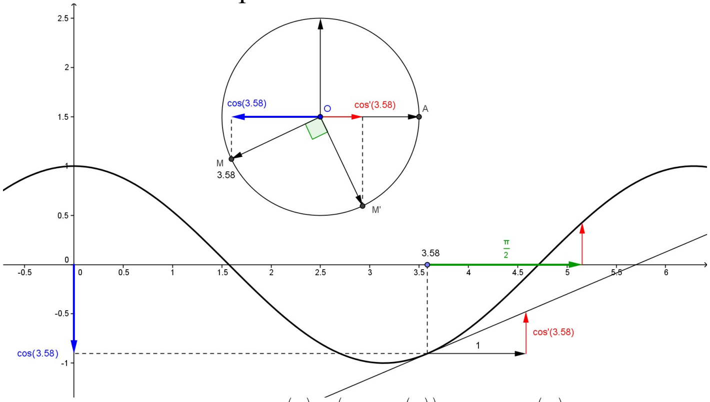
La représentation graphique de la fonction sinus est donc symétrique par rapport ...

Dérivées et sens de variations des fonctions trigonométriques :

Cosinus	Sinus
Pour tout réel t, $\boxed{\cos'(t)=-\sin(t)}$	Pour tout réel t, $\boxed{\sin'(t)=\cos(t)}$

Remarques : $\cos'(t)=\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)$

Exemple pour la tangente à la courbe représentative de la fonction cosinus au point d'abscisse ...



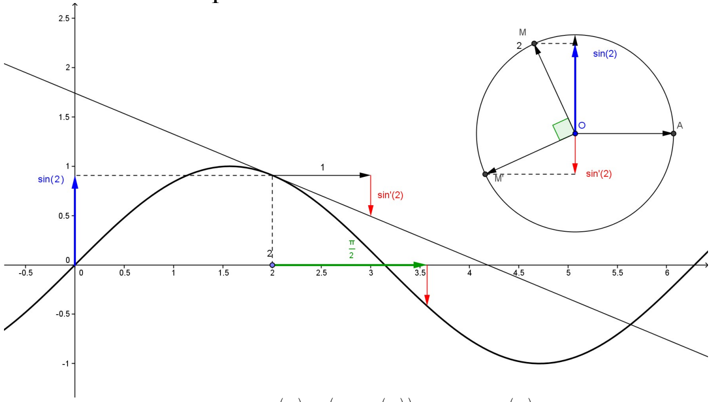
Pour tout réel t, $\cos''(t)=(-\sin(t))'=-\cos(t)$

t	0	π
$\cos'(t)=-\sin(t)$	$-$	
$\cos$	1 ↘	-1

Soient deux réels a et b alors pour tout réel t,
$$(\cos(at+b))'=-a\times\sin(at+b)$$

Remarques : $\sin'(t)=\sin\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)$

Exemple pour la tangente à la courbe représentative de la fonction sinus au point d'abscisse ...



Pour tout réel t, $\sin''(t)=(\cos(t))'=-\sin(t)$

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin'(t)=\cos(t)$	$+$	0	$-$
$\sin$	0 ↗	1	↘ 0

Soient deux réels a et b alors pour tout réel t,
$$(\sin(at+b))'=a\times\cos(at+b)$$

<u>La fonction tangente :</u>

Pour tout réel $t\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, $\boxed{\tan(t)=\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}}$

La fonction tangente est π _périodique : $\tan(t+\pi)=\tan(t)$

La fonction tangente est impaire : $\tan(-t)=-\tan(t)$

Pour tout réel $t\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, $\boxed{\tan'(t)=\dfrac{1}{\cos^2(t)}=1+\tan^2(t)}$