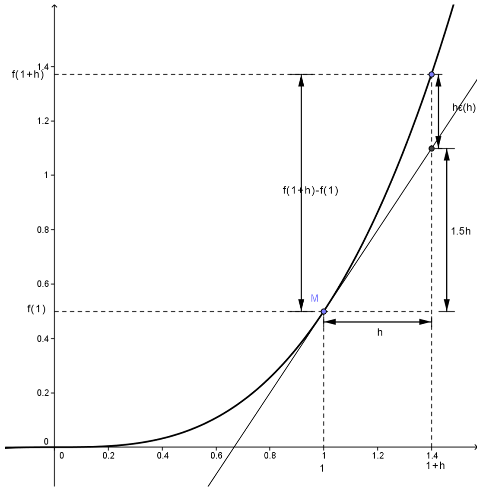
Calcul différentiel et intégral 2 (M-1.1)

Cadre : dans la suite on considère une fonction numérique f définie sur un intervalle I et un réel $a \in \mathrm{I}$

I. Dérivée d'une fonction



Définition du nombre dérivé : la fonction f est dérivable en a s'il existe une nombre réel A et une fonction ε (epsilon) tels que pour tout réel h tel que $a+h \in \mathrm{I}$:

$$\boxed{f(a+h)=f(a)+Ah+h\times\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0}$$

Le nombre A est appelé nombre dérivé de la fonction f en a et noté $A=f'(a)$

Exemple : soit $f(x)=\dfrac{x^3}{2}$ et $a=1$

$f(1+h)=f(1)+\ldots h+h\times\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h)=\ldots$

Pour h très proche de 0 la quantité $h\varepsilon(h)$ est négligeable face à l'approximation affine ...

Notation différentielle :

On considère une fonction $t \mapsto f(t)$ dérivable en a.

On note $\Delta t=h$ les écarts de la variable (souvent temporelle)

$\Delta f=f(a+\Delta t)-f(a)$ les écarts des images

Alors $\Delta f=A\,\Delta t+\Delta t\,\varepsilon(\Delta t)$ ainsi si $\Delta t\neq 0$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta t}=A+\varepsilon(\Delta t)$

Lorsque Δt peut-être considéré comme infiniment proche de 0, on note : $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=A=f'(t)$

Relation manipulée en sciences physique avec la notation différentielle : $\boxed{\mathrm{d}f=f'(t)\,\mathrm{d}t}$

Théorème du taux d'accroissement : la fonction f est dérivable en a si et seulement s'il existe un nombre réel A tel que:

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=A}$$

Propriété de la tangente : si la fonction f est dérivable en a alors la courbe représentative de la fonction f admet une tangente au point d'abscisse a ayant pour équation : $\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$

Exemple : pour $f(x)=\dfrac{x^3}{2}$, la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation : ...

Définition d'une fonction dérivable sur un intervalle : une fonction f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si pour tout réel $a \in \mathrm{I}$ elle est dérivable en a.

Exemples : les fonctions polynomiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$

Les fractions rationnelles sont dérivables sur les intervalles constituant leur ensemble de définition.

II. Intégrales

Définition d'une primitive : soient f une fonction définie sur l'intervalle I et F une fonction dérivable sur l'intervalle I.

La fonction F est une primitive de la fonction f si et seulement si pour tout réel $t \in \mathrm{I}$, $\boxed{F'(t)=f(t)}$

Exemples :

Soit $f(t)=t^2+3t+1$ alors une primitive de f est définie par $F(t)=\ldots$

Une autre primitive de la fonction f peut-être définie par $G(t)=\ldots$

Remarque : deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Syntaxe Xcas : int(t^2+3t+1,t)

Définition d'une intégrale : soient f une fonction continue sur un intervalle I, et deux réels $a \in \mathrm{I}$ et $b \in \mathrm{I}$, alors l'intégrale de la fonction f du nombre a au nombre b est le nombre noté $\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(b)-F(a)}$ où la fonction F est une primitive de la fonction f.

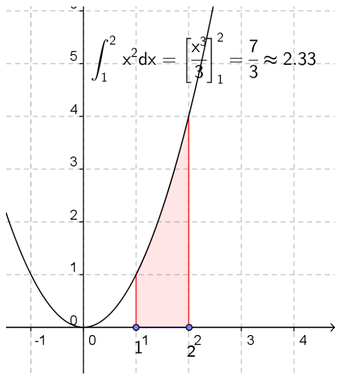
Remarques : l'intégrale ainsi définie ne dépend pas du choix d'une primitive de la fonction f.

On note parfois $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b$

Sur TI : MATH, MATH, 9:fnInt(, fnInt(X²,X,1,2)

Sur Casio : OPTN, CALC, ∫dx, ∫(X²,1,2)

Syntaxe Xcas : int(x^2,x,1,2)



Propriété de l'aire sous la courbe : soient f une fonction continue sur un intervalle I, deux réels $a \in I$ et $b \in I$. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Si $a < b$ et $\forall t \in [a;b]$, $f(t) \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire de la surface définie par les points $M(x;y)$ tels que $\boxed{\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}}$

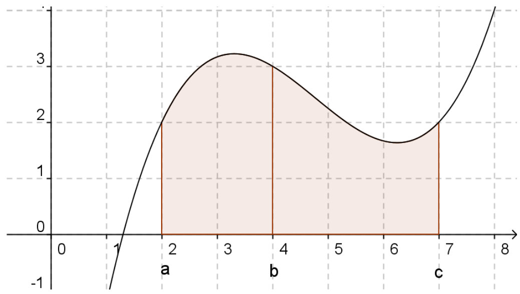
Remarque : si la fonction f est négative, l'intégrale est l'opposée de l'aire "au dessus" de la courbe.

III. Propriétés de l'intégrale

Propriété de la primitive s'annulant en a : soit f une fonction continue sur un intervalle I et un réel $a \in \mathrm{I}$.

Alors la fonction définie sur I par $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de la fonction f sur I s'annulant en a.

Idée de la démo. : soit F une primitive de f, alors $G(x) = F(x) - f(a)$ est une primitive de f et $G(a) = F(a) - F(a) = 0$



Relation de Chasles pour les intégrales : soit f une fonction continue sur un intervalle I et trois réel $a \in \mathrm{I}$, $b \in \mathrm{I}$ et $c \in \mathrm{I}$.

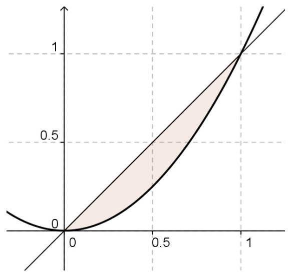
Alors : $\boxed{\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t}$

En particulier on a: $\boxed{\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$

Linéarité de l'intégrale : Soit $k \in \mathbb{R}$, deux fonctions f et g continues sur un intervalle I et deux réels $a \in \mathrm{I}$ et $b \in \mathrm{I}$.

$\boxed{\int_a^b k \times f(t)\,\mathrm{d}t = k \times \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$ (homogénéité) $\boxed{\int_a^b f(t) + g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t}$ (additivité)

Exemples : $\int_0^{\pi} 2\sin t\,\mathrm{d}t = \ldots$ $\int_1^2 x + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$ ...



Cas particulier de l'aire entre deux courbes : si $a < b$ et si $\forall x \in [a;b]$, $g(x) \leqslant f(x)$ alors $\int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire de la surface définie par les points $M(x;y)$ tels que $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ g(x) \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$

Exemple : $\int_0^1 x - x^2\,\mathrm{d}x =$

Intégration par parties : Soient f et g deux fonctions dérivables un intervalle I et deux réels $a \in \mathrm{I}$ et $b \in \mathrm{I}$.

$$\boxed{\int_a^b f(t) \times g'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t) \times g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t) \times g(t)\,\mathrm{d}t}$$

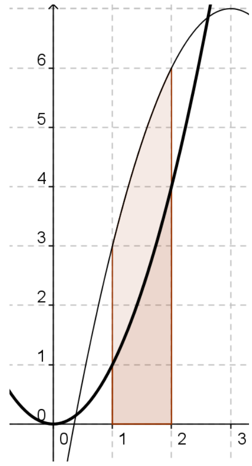
Idée de la démonstration : $(f(t) \times g(t))' = \ldots$

Exemples : $\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t = \ldots$

IV. Intégrales et ordre

Positivité de l'intégrale : soit f une fonction continue sur un intervalle I,et deux réels $a \in \mathrm{I}$, $b \in \mathrm{I}$ tels que $a \leqslant b$

$$\text{si } \forall t \in [a;b],\ 0 \leqslant f(t) \text{ alors } 0 \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$



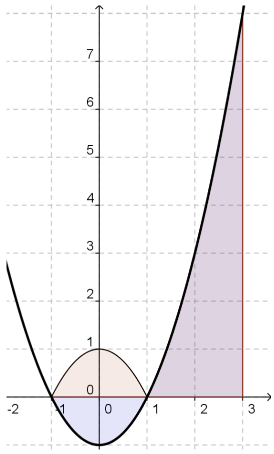
Intégration d'une inégalité : soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et deux réels $a \in \mathrm{I}$, $b \in \mathrm{I}$ tels que $a \leqslant b$

$$\text{si } \forall t \in [a;b],\ f(t) \leqslant g(t) \text{ alors } \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégrale et valeur absolue : soient f une fonction continue sur un intervalle I, et deux réels $a \in \mathrm{I}$, $b \in \mathrm{I}$ tels que $a \leqslant b$ alors :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

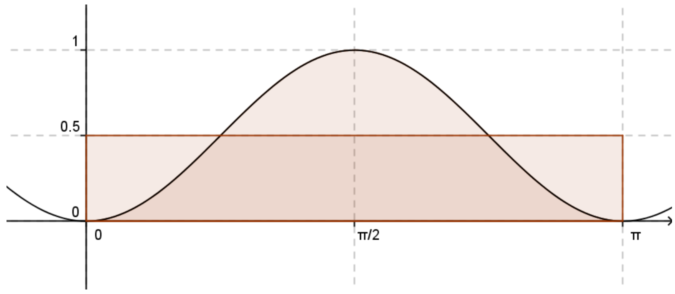
Exemple : soit $f(t)=t^2-1$, $a=-1$ et $b=3$



Le nombre $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est appelé valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$.

Exemple : $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \ldots$

Remarque : la tension efficace est la racine carrée de la valeur moyenne du carré de la tension d'où, en courant sinusoïdal, la relation : $U_{eff}=\dfrac{U_{max}}{\sqrt{2}}$



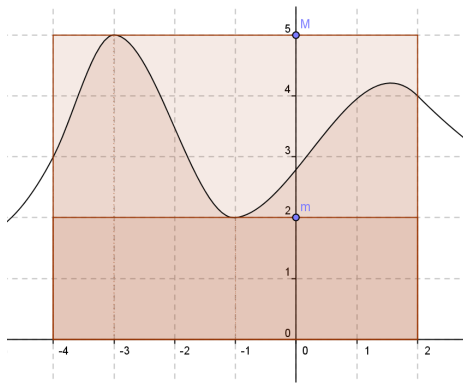
Inégalité de la moyenne : soient f une fonction continue sur un intervalle I, et quatre réels m , M , $a \in \mathrm{I}$, $b \in \mathrm{I}$ tels que $a < b$

$$\text{si } \forall t \in [a;b],\ m \leqslant f(t) \leqslant M$$
$$\text{alors } m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$$

c'est-à-dire : $m \leqslant \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$

Conséquence : s'il existe un réel k tel que $\forall t \in [a;b]$, $|f(t)| \leqslant k$ alors $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant k(b-a)$

Exemple : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \ldots$



Inégalité des accroissements finis (IAF) :
soient f une fonction dérivable sur un intervalle I, et deux réels $a \in \mathrm{I}$, $b \in \mathrm{I}$ tels que $a \leqslant b$:

$$\text{si } \forall t \in [a\,;b],\ |f'(t)| \leqslant k \text{ alors } |f(b)-f(a)| \leqslant k(b-a)$$

Exemples d'application :

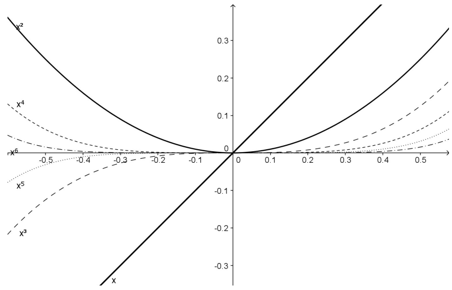
on peut démontrer que $|\sqrt{103}-10| \leqslant \dfrac{3}{20}$ en utilisant la fonction $f(t)=\sqrt{t}$ sur l'intervalle [100;103]...

Ou encore pour tout réel $b>0$, $|\cos(b)-1| \leqslant b$ car ...

V. Développements limités au voisinage de 0

Définition mathématique du mot « négligeable » : soit un réel a et deux fonctions f et g définies au voisinage du nombre a. Alors f est négligeable devant g au voisinage du nombre a si et seulement si $\lim\limits_{t \to a} \dfrac{f(t)}{g(t)}=0$

Remarque : on peut aussi noter de façon équivalente :
* il existe une fonction ε définie au voisinage du nombre a telle que $f(t)=g(t)\times\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to a}\varepsilon(t)=0$
* ou bien $f(t)=\underset{t\to a}{o}\,(g(t))$ (notation de Landau)
* ou encore $f(t)\underset{t\to a}{\ll} g(t)$ (notation de Hardy)



Une échelle de comparaisons au voisinage de 0 : les monômes.

$$1 \underset{t\to 0}{\gg} t \underset{t\to 0}{\gg} t^2 \underset{t\to 0}{\gg} t^3 \underset{t\to 0}{\gg} t^4 \ldots$$

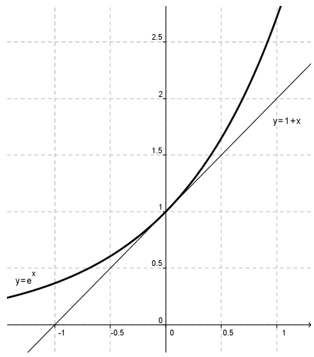
On peut retenir : "au voisinage de 0, les plus petites puissances l'emportent"

Approximation affine de la fonction exponentielle au voisinage de 0 : Il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\text{pour tout réel } h,\ \mathrm{e}^h=1+h+h\,\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$$

de plus $\forall h\in[-1\,;1]$, $|\varepsilon(h)|\leqslant \mathrm{e}\times\dfrac{h}{2}$

Démo : exp est dérivable en 0 donc...
Soit $f(t)=\mathrm{e}^t-(1+t)$, on applique l'IAF pour $h>0$ sur l'intervalle $[0\,;h]$ ...
puis pour $h<0$ sur l'intervalle $[h\,;0]$ ..

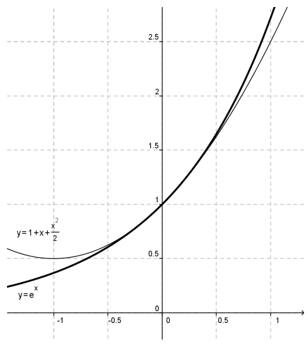


Approximation polynomiale de degré 2 de la fonction exponentielle au voisinage de 0 :
Il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\text{pour tout réel } h,\ \mathrm{e}^h=1+h+\frac{h^2}{2}+h^2\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$$

Démonstration : analogue à la précédente avec $f(t)=\mathrm{e}^t-\left(1+t+\dfrac{t^2}{2}\right)$ ...

On démontre ainsi que : $\forall h\in[-1\,;1]$, $|\varepsilon(h)|\leqslant \mathrm{e}\times\dfrac{h}{6}$

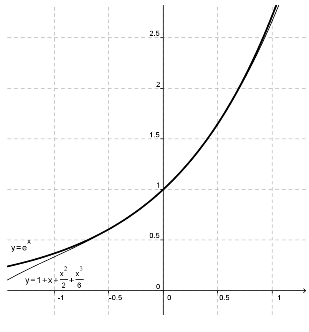


Approximation polynomiale de degré 3 de la fonction exponentielle au voisinage de 0 :
Il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\text{pour tout réel } h,\ \mathrm{e}^h=1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+h^3\,\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$$

Démonstration : analogue à la précédente avec $f(t)=\mathrm{e}^t-\left(1+t+\dfrac{t^2}{3}+\dfrac{t^3}{6}\right)$ ...

On démontre ainsi que : $\forall h\in[-1\,;1]$ $|\varepsilon(h)|\leqslant \mathrm{e}\times\dfrac{h}{24}$



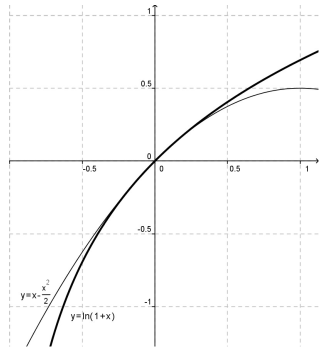
Développement limité d'ordre n de la fonction exponentielle au voisinage de 0 :
Soit $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel t,

$$\boxed{\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0}$$

On rappelle que : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$
La partie polynomiale est appelée partie régulière du développement limité.
L'ordre du développement limité est l'exposant de la puissance de t multipliée par $\varepsilon(t)$.
Pour simplifier les notation on abrège DL_n pour développement limité à l'ordre n

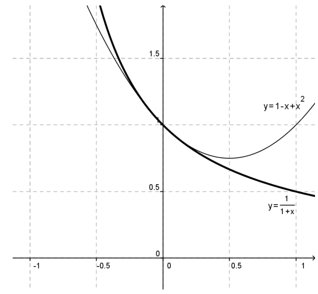
Développements limités à connaître :

$$\boxed{\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0}$$

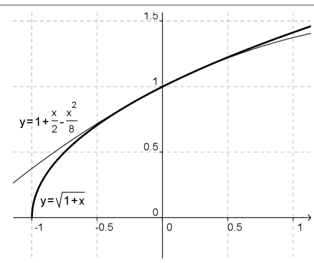


$$\boxed{\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \ldots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0}$$

Remarque : ce DL_n peut s'obtenir en intégrant celui de $\ln(1+t)$

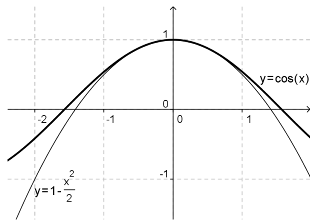


$$\boxed{(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} t^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0}$$



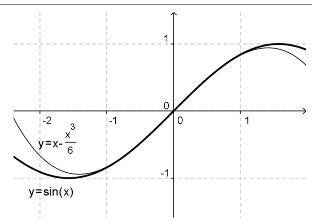
$$\boxed{\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0}$$

Remarque : la fonction cosinus étant paire seules les puissances d'exposants pairs apparaissent.



$$\boxed{\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0}$$

Remarque : ce DL_n peut s'obtenir en intégrant celui de cos.



Remarques : dans chaque cas on utilise une fonction notée ε, pour représenter la partie négligeable lorsque le réel t est proche de 0. Cependant, en toute rigueur, les fonctions ε utilisées précédemment ne sont pas égales.

Opérations sur les développements limités en 0 :
Somme de deux développements limités en 0 :
soient f et g deux fonctions admettant des DL_n en 0 : $f(t) = P(t) + t^n \varepsilon(t)$ et $g(t) = Q(t) + t^n \varepsilon(t)$
Alors la fonction $f+g$ admet un DL_n en 0 : $(f+g)(t) = P(t) + Q(t) + t^n \varepsilon(t)$
Exemple : $\mathrm{e}^x + \cos(x) =$

Multiplication d'un développement limité en 0 par un réel :
soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et f une fonction admettant un DL_n en 0 : $f(t)=P(t)+t^n\varepsilon(t)$
Alors la fonction λf admet un DL_n en 0 : $\lambda f(t)=\lambda P(t)+t^n\varepsilon(t)$
Exemples : $-(2\mathrm{e})^x=$
$\mathrm{e}^x-\cos(x)=$

Produit de deux développements limités en 0 :
soient f et g deux fonctions admettant des DL_n en 0 : $f(t)=P(t)+t^n\varepsilon(t)$ et $g(t)=Q(t)+t^n\varepsilon(t)$
Soient R et S deux polynômes tels que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $P(t)\times Q(t)=R(t)+t^{n+1}(S(t))$
Alors la fonction $f\times g$ admet un DL_n en 0 : $(f\times g)(t)=R(t)+t^n\varepsilon(t)$
Remarque : le polynôme R est le produit $P\times Q$ tronqué à l'ordre n
Exemples : $t^2\times\dfrac{1}{1+t}=$
$\mathrm{e}^t\times\left(\dfrac{1}{1+t}\right)=$

Composition de deux développements limités en 0 :
soient f et g deux fonctions admettant des DL_n en 0 : $f(t)=P(t)+t^n\varepsilon(t)$ et $g(t)=Q(t)+t^n\varepsilon(t)$ avec $g(0)=0$
Soient R et S deux polynômes tels que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $P(Q(t))=R(t)+t^{n+1}(S(t))$
Alors la fonction $f\circ g$ admet un DL_n en 0 : $f(g(t))=R(t)+t^n\times\varepsilon(t)$
Remarque : cas particulier $f(\lambda t)=P(\lambda t)+t^n\varepsilon(t)$
Exemple : $\cos(2t)=\ldots$

$\mathrm{e}^{\sin(t)}=\ldots$

Attention, si la condition $g(0)=0$ n'est pas vérifiée, on peut parfois contourner le problème algébriquement.
Exemples : $\mathrm{e}^{\frac{1}{1+t}}=\mathrm{e}^{1-t+t^2+t^2\varepsilon(t)}=\mathrm{e}\times\mathrm{e}^{-t+t^2+t^2\varepsilon(t)}=\ldots$
$\ln\left(\dfrac{1}{1+t}\right)=\ln(1-t+t^2+t^2\varepsilon(t))=\ln(1+(-t+t^2+t^2\varepsilon(t)))=\ldots$

Inverse d'un développement limité en 0 :
soit f une fonction admettant un DL_n en 0 : $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_nt^n+t^n\varepsilon(t)$ avec $a_0\neq 0$
alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ admet un DL_n en 0 obtenu grâce au DL_n en 0 de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{1+x}$ et la règle de composition des DL_n en 0. En effet : $\dfrac{1}{f(t)}=\dfrac{1}{a_0}\times\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{a_1}{a_0}t+\dfrac{a_2}{a_0}t^2+\ldots\dfrac{a_n}{a_0}t^n+t^n\varepsilon(t)\right)}=\ldots$

Exemple : $\dfrac{1}{\cos(t)}=\ldots$
Syntaxe Xcas : taylor(1/cos(x),x=0,4)

Intégration d'un développement limité en 0 :
soit f une fonction continue dans un voisinage de 0 et admettant un DL_n en 0 : $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_nt^n+t^n\varepsilon(t)$
Alors toute primitive F de f admet un DL_{n+1} en 0 : $F(t)=F(0)+a_0t+a_1\dfrac{t^2}{2}+\ldots a_n\dfrac{t^{n+1}}{n+1}+t^{n+1}\varepsilon(t)$
Exemple : Soit $f(t)=\cos(t)$ alors $F(t)=\ldots$

Dérivation d'un développement limité en 0 :
soit f une fonction dérivable dans un voisinage de 0, admettant un DL_n en 0 : $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_nt^n+t^n\varepsilon(t)$
si de plus f' admet un DL_{n-1} en 0 alors : $f'(t)=a_1+2a_2t+\ldots+na_nt^{n-1}+t^{n-1}\varepsilon(t)$
Remarque : f admet un DL_n en 0 est en général insuffisant pour assurer que f' admet un DL_{n-1} en 0

VI. Exemples de courbes planes paramétrées.

Définition d'une courbe plane paramétrée :

Soient un intervalle I et deux fonctions notées f et g définies sur l'intervalle I.

Le plan étant muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ où $t \in I$ est l'ensemble des points $M(f(t);g(t))$ où t décrit l'intervalle I.

Remarques : en général on écrit $x(t)$ et $y(t)$ puisque l'abscisse et l'ordonnée du point M dépendent de la variable t.

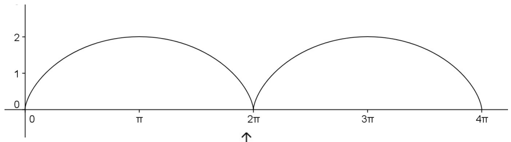
En cinématique, si t représente le temps et $M(x(t);y(t))$ un point mobile au cours du temps (noté parfois $M(t)$), la courbe paramétrée représente la trajectoire décrite par le point M pendant le laps de temps I.

Le vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est appelé vecteur position.

On peut considérer la fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}^2$ par : $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

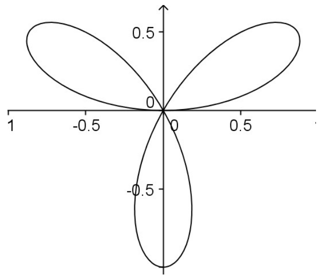
Exemples : la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t)=\cos(t) \\ y(t)=\sin(t) \end{cases}$ où $t \in [0:2\pi]$ est le cercle de centre O et de rayon 1.

La courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t)=t-\sin(t) \\ y(t)=1-\cos(t) \end{cases}$ où $t \in [0;4\pi]$ est une cycloïde

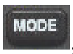


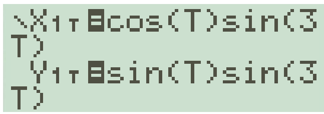
La courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t)=\cos(t)\sin(3t) \\ y(t)=\sin(t)\sin(3t) \end{cases}$ où $t \in [0;\pi]$ est un trifolium

La courbe passe quatre fois par le point O : $M(0)$, $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $M(\pi)$



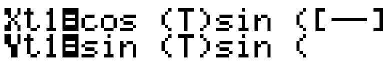
Syntaxe GeoGebra : Courbe[cos(t)sin(3t),sin(t)sin(3t),t,0,pi]

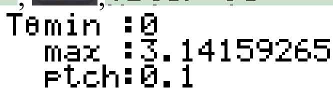
Sur TI : , 

, , 

, , 

,

Sur Casio : , , 

, , , 

Définition du vecteur dérivé :

Soient un intervalle I et deux fonctions notées x et y dérivables sur l'intervalle I.

Soit $t_0 \in \mathrm{I}$, le vecteur $\vec{v_0}\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$ est appelé vecteur dérivé

de la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ en t_0.

Remarque : en cinématique, le vecteur $\vec{v_0}$ est appelé vecteur vitesse au temps t_0.

Si le vecteur $\vec{v_0}$ est non nul alors le point $M(t_0)$ est dit régulier.

Si $\vec{v_0}=\vec{0}$ alors alors le point $M(t_0)$ est dit singulier.

Propriété de la tangente en un point régulier :

Soient $\mathscr{C}$ la courbe paramétrée par la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathrm{I}$ telle que les fonctions x et y soient dérivables sur l'intervalle I, un réel $t_0 \in \mathrm{I}$, le point $M_0(x(t_0);y(t_0))$ de la courbe $\mathscr{C}$ et le vecteur dérivé $\vec{v_0}\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$.

> Si le vecteur $\vec{v_0}$ est non nul alors la tangente à la courbe la courbe $\mathscr{C}$ au point M_0 est dirigée par le vecteur $\vec{v_0}$.

Exemple : pour le trifolium, la tangente au point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ admet pour vecteur directeur...

Remarque : si les fonctions x et y admettent des DL_1 en 0 : $x(t)=a_0+a_1t+t\varepsilon(t)$ et $y(t)=b_0+b_1t+t\varepsilon(t)$ tels que a_1 et b_1 ne soient pas tous les deux nuls, alors le point $M(0)$ a pour coordonnées $(a_0;b_0)$ et la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M_0 est dirigée par le vecteur $\vec{v_0}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$.

Exemple : pour le trifolium, au point $M(0)$ ...