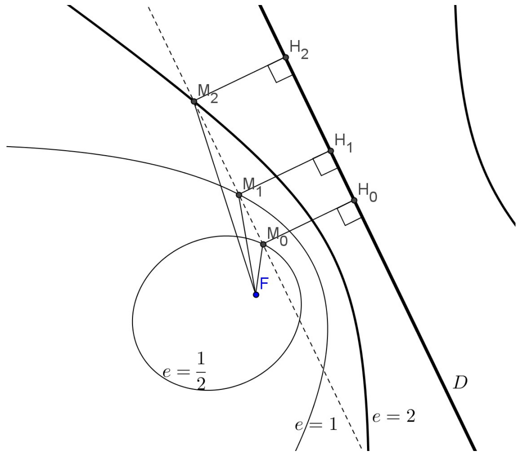
Les coniques

Le plan euclidien est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

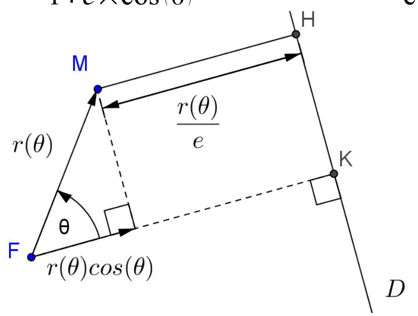
<table>
<tr><th>Définition géométrique</th><th>Définition analytique</th></tr>
<tr>
<td>
Soient F un point, D une droite ne contenant pas F et e un réel strictement positif. A tout point M du plan on associe H son projeté orthogonal sur la droite D.
La conique de foyer F, de directrice D et d’excentricité e est définie par :
$$\mathscr{C} = \left\{M \in P \middle| \frac{MF}{MH} = \mathrm{e}\right\}$$
Si $0<e<1$ alors $\mathscr{C}$ est une ellipse
Si $e=1$ alors $\mathscr{C}$ est une parabole
Si $1<e$ alors $\mathscr{C}$ est une hyperbole


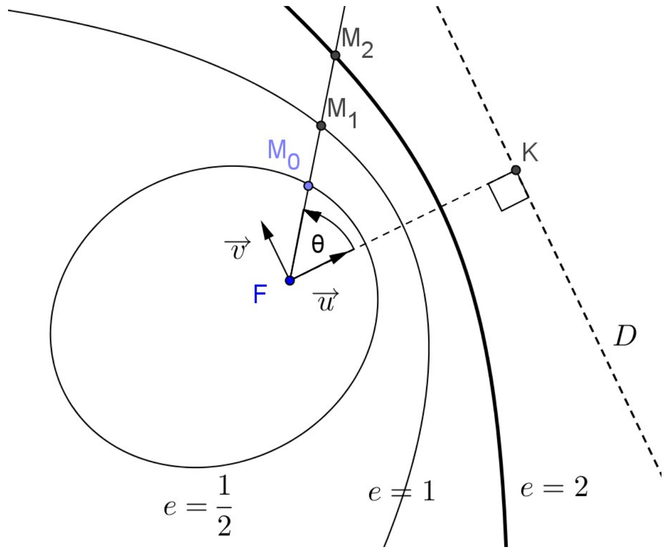
</td>
<td>
Soient A, B ,C, α , β ,et γ six nombres réels non tous nuls :
$$\mathscr{C} = \{\mathrm{M}(x;y) | Ax^2+Bxy+Cy^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0\}$$
Si $B^2-4AC<0$ $\mathscr{C}$ est une ellipse (ou point ou $\varnothing$)
Si $B^2-4AC=0$ alors $\mathscr{C}$ est une parabole (ou deux droites parallèles, une droite, $\varnothing$)
Si $B^2-4AC>0$ alors $\mathscr{C}$ est une hyperbole (ou deux droites sécantes)
La matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \frac{\mathrm{B}}{2} \\ \frac{\mathrm{B}}{2} & \mathrm{C} \end{pmatrix}$ associée à la partie quadratique est diagonalisable dans une base orthonormale donc en notant λ_1 et λ_2 ses valeurs propres (comptées autant de fois que leur ordre de multiplicité) on a : $\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \frac{\mathrm{B}}{2} \\ \frac{\mathrm{B}}{2} & \mathrm{C} \end{vmatrix} = \lambda_1 \times \lambda_2$.
</td>
</tr>
</table>

Soit $\mathscr{C}$ la conique de foyer F,de directrice D et d’excentricité $e>0$. On note K le projeté orthogonal de F sur D, $p=e\times KF$, les vecteurs $\vec{u}=\frac{\overrightarrow{FK}}{\|\overrightarrow{FK}\|}$ et $\vec{v}=Rot\left(\vec{u};\frac{\pi}{2}\right)$

Dans le repère orthonormé $(F;\vec{u};\vec{v})$, $\mathscr{C}$ a pour équation polaire :

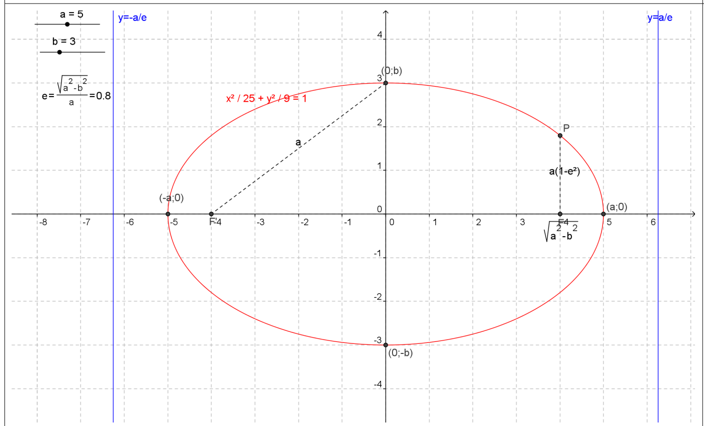
$$\rho(\theta)=\frac{p}{1+e\times\cos(\theta)} \text{ pour } \cos(\theta)\neq-\frac{1}{\mathrm{e}}.$$



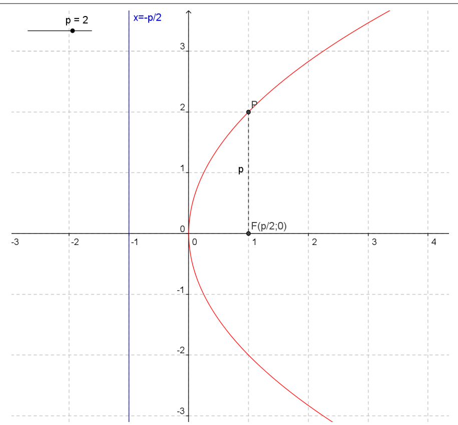


	Ellipse	Parabole	Hyperbole
Équation réduite	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a\geqslant b$	$y^2=2\,px$	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$
Foyers	$c=\sqrt{a^2-b^2}$ alors $F_1(c;0)$ et $F_2(-c;0)$	$\left(0;\dfrac{p}{2}\right)$	$c=\sqrt{a^2+b^2}$ alors $F_1(c;0)$ et $F_2(-c;0)$
Excentricité	$\mathrm{e}=\dfrac{c}{a}$	$\mathrm{e}=1$	$\mathrm{e}=\dfrac{c}{a}$
paramètre p	$p=a(1-\mathrm{e}^2)$	p	$p=a(\mathrm{e}^2-1)$
Équations des directrices	$x=\dfrac{a}{\mathrm{e}}$ et $x=-\dfrac{a}{\mathrm{e}}$	$x=-\dfrac{p}{2}$	$x=\dfrac{a}{\mathrm{e}}$ et $x=-\dfrac{a}{\mathrm{e}}$
Sommet(s)	$(a;0)$; $(-a;0)$; $(0;b)$;$(0;-b)$	$(0;0)$	$(a;0)$ et $(-a;0)$
Asymptotes	$\varnothing$	$\varnothing$	$y=\dfrac{b}{a}x$ et $y=-\dfrac{b}{a}x$
Représentation paramétrique	$\begin{cases}x(t)=a\cos(t)\\y(t)=b\sin(t)\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$	$\begin{cases}x(t)=\dfrac{t^2}{2\,p}\\y(t)=t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$	$\begin{cases}x(t)=\pm a\,\mathrm{ch}(t)\\y(t)=b\,\mathrm{sh}(t)\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$
Équation de la tangente au point $M(x_0;y_0)$	$\dfrac{x_0}{a^2}x+\dfrac{y_0}{b^2}y=1$	$y_0\,y=p(x+x_0)$	$\dfrac{x_0}{a^2}x-\dfrac{y_0}{b^2}y=1$

Équation réduite d'une ellipse



Équation réduite d'une parabole



Équation réduite d'une hyperbole