Quelques techniques de calcul d'intégrales

Ici aucune précaution n'est prise sur l'existence des fonctions ou de leur intégrale ! On note P et Q des polynômes, et R une fraction rationnelle. Cette liste n'est pas exhaustive.

Forme de l'expression	Technique	Calcul
$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$	Primitives usuelles	$[f'(t)]_a^b = f(b) - f(a)$ Ex : $\cos^n t$ ou $\sin^n t$ ➔ linéariser ; penser à $\mathrm{e}^a \cos(b) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{a+ib})$, $\mathrm{e}^a \sin(b) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{a+ib})$ $\ln(\lvert\ln(x)\rvert)' = \dfrac{1}{x\ln(x)}$, $(\ln^2 x)' = \dfrac{2\ln(x)}{x}$, $\ln(\lvert\cos(x)\rvert)' = -\tan(x)$, $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, ...
$\int_a^b g'(t)\times f(t)\,\mathrm{d}t$	Intégration par parties (IPP)	$[g(t)\times f(t)]_b^a - \int_a^b g(t)\times f'(t)\,\mathrm{d}t$ Ex : pour $\mathrm{P}(t)\times\ln(t)$ et $\mathrm{P}(t)\times\arctan(t)$, dériver ln et arctan pour $\mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$, $\mathrm{P}(t)\cos(\alpha t)$ ou $\mathrm{P}(t)\sin(\alpha t)$, penser aux IPP successives, ou aux récurrences...
$\int_a^b g'(t)\times f'(g(t))\,\mathrm{d}t$	Dérivée d'une fonction composée	$[f(g(t))]_b^a = f(g(a)) - f(g(b))$ Ex : $(u^2)' = 2u'\times u$, $(\ln(\lvert u\rvert))' = \dfrac{u'}{u}$ si $u(t)\neq 0$,...
$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$	Changement de variable	en posant $t = g(u)$ on a $dt = g'(u)du$ et $u = g^{-1}(t)$ donc : $\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))\times g'(u)\,\mathrm{d}u$
$\int_a^b \dfrac{\mathrm{P}(t)}{\mathrm{Q}(t)}\,\mathrm{d}t$	Décomposition en éléments simples : $\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ est combinaison linéaire d'un polynôme et de fractions rationnelles du type, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $\beta^2 - 4\gamma < 0$ 1) $\dfrac{1}{(t+\alpha)^n}$ ou 2) $\dfrac{2t+\beta}{(t^2+\beta t+\gamma)^n}$ 3) $\dfrac{1}{(t^2+\beta t+\gamma)^n}$	Les cas 1) et 2) sont des primitives usuelles : si $\forall t\in[a;b]$, $u(t)\neq 0$ alors : $\int_a^b \dfrac{u'(t)}{u(t)}\,\mathrm{d}t = [\ln(\lvert u(t)\rvert)]_b^a$ et si $n>1$ alors $\int_a^b \dfrac{u'(t)}{(u(t))^n}\,\mathrm{d}x = \left[-\dfrac{1}{n-1}\times\dfrac{1}{(u(t))^{n-1}}\right]_b^a$ Pour le cas 3), par changement de variable affine : $\int_a^b \dfrac{1}{(t^2+\beta t+\gamma)^n}\,\mathrm{d}t = k\int_{a'}^{b'} \dfrac{1}{(1+u^2)^n}\,\mathrm{d}u$ Pour $n=1$, $\int_{a'}^{b'} \dfrac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = [\arctan(u)]_{b'}^{a'}$, si $n>1$, par IPP successives en posant : $\dfrac{1}{(1+u^2)^n} = \dfrac{1+u^2-u^2}{(1+u^2)^n} = \dfrac{1}{(1+u^2)^{n-1}} - \dfrac{u}{2}\times\dfrac{2u}{(1+u^2)^n} = \dfrac{1}{(1+u^2)^{n-1}} - \dfrac{u}{2}\times\left(-\dfrac{1}{n-1}\times\dfrac{1}{(1+u^2)^{n-1}}\right)'$
$\int_a^b \ln(\mathrm{P}(t))\times\mathrm{R}'(t)\,\mathrm{d}t$; $\int_a^b \arctan(\mathrm{P}(t))\times\mathrm{R}'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b \mathit{argth}(\mathrm{P}(t))\times\mathrm{R}'(t)\,\mathrm{d}t$ se ramènent au cas précédent par IPP en dérivant $\ln(\mathrm{P}(t))$, $\arctan(\mathrm{P}(t))$ ou $\mathit{argth}(\mathrm{P}(t))$.		
$\int_a^b \mathrm{R}(\cos(t);\sin(t))\,\mathrm{d}t$	Changement de variable universel : $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ Dans certains cas : $u = \cos(t)$; $u = \sin(t)$; $u = \tan(t)$	$t = 2\arctan(u)$ donc $dt = \dfrac{2du}{1+u^2}$; $\cos(t) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\sin(t) = \dfrac{2u}{1+u^2}$
$\int_a^b \mathrm{R}(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ ou $\int_a^b \mathrm{R}(\mathrm{ch}(t);\mathrm{sh}(t))\,\mathrm{d}t$	Changement de variable universel $u = \mathrm{e}^t$ Parfois utiles : $u = \mathrm{th}\left(\dfrac{t}{2}\right)$; $u = \mathrm{ch}(t)$; $u = \mathrm{sh}(t)$	$t = \ln(u)$ donc $dt = \dfrac{du}{u}$; $\mathrm{ch}(t) = \dfrac{u+\frac{1}{u}}{2} = \dfrac{u^2+1}{2u}$ et $\mathrm{sh}(t) = \dfrac{u-\frac{1}{u}}{2} = \dfrac{u^2-1}{2u}$
$\int_a^b \mathrm{R}\left(t;\sqrt{\alpha t^2+\beta t+\gamma}\right)\mathrm{d}t$	Mise sous forme canonique du radicande, puis changement de variable affine.	➢ $\sqrt{1+t^2}$ alors on pose $t = \mathrm{sh}(u)$ ainsi $dt = \mathrm{ch}(u)du = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2 u}\,du = \sqrt{1+t^2}\,du$ ➢ $\sqrt{1-t^2}$ alors on pose $t = \sin(u)$ ainsi $dt = \cos(u)du = \pm\sqrt{1-\sin^2 u}\,du = \pm\sqrt{1-t^2}\,du$ ➢ $\sqrt{t^2-1}$ alors on pose $t = \mathrm{ch}(u)$ ainsi $dt = \mathrm{sh}(u)du = \pm\sqrt{\mathrm{ch}^2 u-1}\,du = \pm\sqrt{t^2-1}\,du$
$\int_a^b \mathrm{R}\left(t;\sqrt[n]{\dfrac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}}\right)\mathrm{d}t$	Changement de variable $u = \sqrt[n]{\dfrac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}}$	$u^n = \dfrac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}$ $\Leftrightarrow$ $t(\gamma u^n - \alpha) = \beta - \delta u^n$ $\Leftrightarrow$ $t = \dfrac{\beta-\delta u^n}{\gamma u^n-\alpha}$ donc $dt = \dfrac{(\alpha\delta-\beta\gamma)n u^{n-1}}{(\gamma u^n-\alpha)^2}du$