Les formules de Taylor... au programme de TSI

Fonctions d'une variable réelle

Soit un intervalle I, un réel $a \in \mathrm{I}$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in \mathrm{I}$.

Remarques préliminaires : en posant : $\boxed{x=a+h}$ c'est-à-dire $\boxed{x-a=h}$

On a alors : $\boxed{x \to a} \Leftrightarrow \boxed{h \to 0}$

Formule de Taylor-Young à l'ordre 0 : local

Pour $f:\mathrm{I} \to \mathbb{C}$: f est continue en a $\Leftrightarrow$ $\forall h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in \mathrm{I}$, on a : $f(a+h)=f(a)+o(1)$

Par définition de la continuité : $f:\mathrm{I} \to \mathbb{C}$ est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h)-f(a)=0$ □

Pour $f:\mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$: $f: t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ est continue en a $\Leftrightarrow$ $\forall h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in \mathrm{I}$, $\begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ \vdots \\ f_n(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_n(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(1) \\ \vdots \\ o(1) \end{pmatrix}$

Par définition de la continuité : $f:\mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{h \to 0} \|f(a+h)-f(a)\|=0$ □

Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 : local

Pour $f:\mathrm{I} \to \mathbb{C}$: f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ $\exists \mathrm{A} \overset{\text{def}}{=} f'(a) \in \mathbb{C}$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}$ vérifiant $a+h \in \mathrm{I}$, on a :

$$f(a+h)=f(a)+h \times \mathrm{A}+o(h)$$

Si f est dérivable en a alors la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a admet pour équation : $y=f(a)+(x-a)f'(a)$ (approximation affine obtenue en posant $a+h=x$)

Pour $f:\mathrm{I} \to \mathbb{C}$, par définition de la dérivabilité d'une fonction scalaire :

f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)=0$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h}=0$ □

Application aux tangentes : en posant $x=a+h$, on a $f(x)=\underbrace{\left(f(a)+(x-a)f'(a)\right)}_{\substack{\text{meilleure approximation affine} \\ \text{de } f(x) \text{ au voisinage de } a}}+o(x-a)$

Ainsi l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est : $y=f(a)+(x-a)f'(a)$

Pour $f:\mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$: $f: t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ est dérivable en a $\Leftrightarrow$ $\exists \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{A}_n \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} f'(a) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}$ vérifiant $a+h \in \mathrm{I}$, on a : $\begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ \vdots \\ f_n(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_n(a) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{A}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(h) \\ \vdots \\ o(h) \end{pmatrix}$

Si f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ ($f(a)$ est dit régulier) alors la tangente à la courbe de $\mathbb{R}^n$ paramétrée par f , au point de coordonnées $f(a)$, admet pour paramétrage : $\begin{cases} x_1=f_1(a)+t\,f_1'(a) \\ \vdots \\ x_n=f_n(a)+t\,f_n'(a) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Pour $f:\mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$, par définition de la dérivabilité d'une fonction vectorielle :

f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{h \to 0} \left\| \dfrac{1}{h}\left(f(a+h)-f(a)\right)-f'(a) \right\|=0$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\|f(a+h)-f(a)-h\,f'(a)\|}{h}=0$ □

Application aux tangentes : dans $\mathbb{R}^2$, une équation cartésienne de la tangente est $\begin{vmatrix} x-f_1(a) & f_1'(a) \\ y-f_2(a) & f_2'(a) \end{vmatrix}=0$.

Formule de Taylor-Young à l'ordre n : local

Si $f:\mathrm{I} \to \mathbb{C}$ est de classe C^p sur l'intervalle I alors :

$$\forall h \in \mathbb{R} \text{ tel que } a+h \in \mathrm{I} \text{ , on a : } f(a+h)=f(a)+h \times f'(a)+\frac{h^2}{2} \times f''(a)+\ldots+\frac{h^p}{p!} \times f^{(p)}(a)+o(h^p)$$

En posant $x=a+h$ on obtient un développement limité à l'ordre p en a :

$$f(x)=f(a)+(x-a) \times f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2} f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^p}{p!} \times f^{(p)}(a)+o\left((x-a)^p\right)$$

Démonstration : <u>par récurrence</u>, avec HR(p) l'énoncé précédent.
<u>Initialisation</u> : HR(0) est vérifiée par définition de la continuité d'une fonction en a .
<u>Hérédité</u> : supposons qu'il existe un entier $k>0$ tel que HR(k) soit vérifié.
Soit $f\in C^{k+1}(I;\mathbb{C})$ alors $f'\in C^{k}(I;\mathbb{C})$ donc d'après $\text{HR}(k)$,
$\forall h\in\mathbb{R}$ tel que $a+h\in I$, on a : $f'(a+h)=f'(a)+h\times f''(a)+\frac{h^2}{2}\times f'''(a)+\ldots+\frac{h^k}{k!}\times f^{(k+1)}(a)+o(h^k)$
Ainsi, la fonction $h\mapsto f'(a+h)$ étant continue pour $a+h\in I$, <u>l'intégration membre à membre</u> donne :
$$\int_0^h f'(a+t)\,\mathrm{d}t=\int_0^h f'(a)+t\times f''(a)+t^2\times\frac{f'''(a)}{2}+\ldots+t^k\times\frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}+o(t^k)\,\mathrm{d}t$$
Or la fonction $h\mapsto f'(a+h)-\left(f'(a)+h\times f''(a)+\frac{h^2}{2}\times f'''(a)+\ldots+\frac{h^k}{k!}\times\left(f^{(k+1)}(a)\right)\right)=o(h^k)$ est continue pour $a+h\in I$
donc l'intégrale $\int_0^h o(t^k)\,\mathrm{d}t$ est définie pour $a+h\in I$.
De plus $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ tel que $|t|<\delta \Rightarrow |o(t^k)|<\varepsilon|t^k|$
Or si $h\in[0;\delta]$, <u>l'inégalité de la moyenne</u> donne : $\left|\int_0^h o(t^k)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^h|o(t^k)|\,\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon\int_0^h t^k\,\mathrm{d}t=\varepsilon\frac{h^{k+1}}{k+1}$
Si $h\in[-\delta;0]$, <u>l'inégalité de la moyenne</u> donne : $\left|\int_0^h o(t^k)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_h^0|o(t^k)|\,\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon\int_h^0(-t^k)\,\mathrm{d}t=\varepsilon\left[-\frac{(-t)^{k+1}}{k+1}\right]_h^0=\varepsilon\frac{(-h)^{k+1}}{k+1}$
Ainsi, $\int_0^h o(t^k)\,\mathrm{d}t=o(h^{k+1})$.
Donc : $f(a+h)-f(a)=h\,f'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\ldots+\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}f^{k+1}(a)+o(h^{k+1})$ ainsi $\text{HR}(k+1)$ est vérifiée.
<u>Conclusion</u> : pour tout entier naturel p , $\text{HR}(p)$ est vraie.□

Pour $n\geqslant 2$ le théorème de Taylor-Young N'EST PAS un théorème d'équivalence.

Contre-exemple : pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

$\forall h\neq 0$, $f(0+h)=h^2\left(h\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right)=o(h^2)$ car $\lim\limits_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{h}\right)=0$ (théorème de comparaison)
De plus $f(0)=0$ donc $\forall h\in\mathbb{R}$, $f(0+h)=o(h^2)$, ainsi admet un développement limité à l'ordre 2 .
Par ailleurs f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} f'(x)=3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ f'(0)=0 \end{cases}$ (th. de prolongement de la dérivée)
Cependant, pour $x\neq 0$, $\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=3x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite quand $x\to 0$, donc la fonction f' n'est pas dérivable en 0, ainsi la fonction f n'est pas 2 fois dérivable en 0.
<u>Application à l'étude de la position locale d'une courbe par rapport à sa tangente en un point</u> : en utilisant un développement limité de $f(x)$ en a du type : $f(x)=\underbrace{f(a)+(x-a)f'(a)}_{\substack{\text{meilleure approximation affine}\\ \text{de } f(x) \text{ au voisinage de } a}}+\underbrace{\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+o\left((x-a)^k\right)}_{\substack{\text{contrôle la position locale de la}\\ \text{courbe par rapport à sa tangente}}}$

Il suffit d'étudier le signe de $\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$ pour conclure sur la position locale de la courbe par rapport à sa tangente... au voisinage de a .

Si $f:I\to\mathbb{R}^n$ est de classe C^p sur l'intervalle I alors :
$$\forall h\in\mathbb{R} \text{ tel que } a+h\in I\text{ , on a : } \begin{pmatrix} f_1(a+h)\\ \vdots \\ f_n(a+h)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(a)\\ \vdots \\ f_n(a)\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix} f_1'(a)\\ \vdots \\ f_n'(a)\end{pmatrix}+\frac{h^2}{2}\begin{pmatrix} f_1''(a)\\ \vdots \\ f_n''(a)\end{pmatrix}\ldots+\frac{h^p}{p!}\begin{pmatrix} f_1^{(p)}(a)\\ \vdots \\ f_n^{(p)}(a)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} o(h^p)\\ \vdots \\ o(h^p)\end{pmatrix}$$

Démonstration : par application de la formule de Taylor-Young précédente <u>sur chaque fonction coordonnée</u>.□
<u>Application dans $\mathbb{R}^2$ à l'étude de la position locale d'une courbe par rapport à sa tangente en un point</u> : en notant :
p l'ordre de la première dérivée non nulle de f en a : $p\stackrel{\text{def}}{=}min\{i\geqslant 1|f^{(i)}(a)\neq 0\}$
q l'ordre de la première dérivée non colinéaire à $f^{(p)}(a)$: $q\stackrel{\text{def}}{=}min\{j>p|det(f^{(j)}(a);f^{(p)}(a))\neq 0\}$
$$\text{On a : }\begin{pmatrix} f_1(a+h)\\ f_2(a+h)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(a)\\ f_2(a)\end{pmatrix}+\underbrace{\frac{h^p}{p!}\left(\begin{pmatrix} f_1^{(p)}(a)\\ f_2^{(p)}(a)\end{pmatrix}+\frac{h}{p+1}\begin{pmatrix} f_1^{(p+1)}(a)\\ f_2^{(p+1)}(a)\end{pmatrix}+\ldots+\frac{p!h^{q-1-p}}{(q-1)!}\begin{pmatrix} f_1^{(q-1)}(a)\\ f_2^{(q-1)}(a)\end{pmatrix}\right)}_{\text{colinéaire et dans le même sens que } f^{(p)}(a) \text{ pour } h \text{ proche de } 0}+\underbrace{\frac{h^q}{q!}\begin{pmatrix} f_1^{(q)}(a)\\ f_2^{(q)}(a)\end{pmatrix}}_{\text{non colinéaire à } f^{(p)}(a)}+\begin{pmatrix} o(h^q)\\ o(h^q)\end{pmatrix}$$

Les parités de p et q permettent de caractériser la position locale de la courbe par rapport à sa tangente (ou demi-tangente) au voisinage du point $f(a)$.

Formule de Taylor-Lagrange : un théorème d'existence

Si $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ est $p+1$ fois dérivable sur l'intervalle $[a;b]$ alors

$$\exists c\in]a;b[\text{ tel que } f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^p}{p!}f^{(p)}(a)+\frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+1)}(c)$$

⚠ Ce résultat n'est plus valide pour f à valeurs complexes ou à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque : pour $p=0$ ce résultat est le théorème des accroissements finis.

Démonstration : Soit φ la fonction définie sur $[a;b]$ par : $\varphi(x)=f(b)-\sum_{k=0}^{p}\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k)}(x)-\frac{(b-x)^{p+1}}{(p+1)!}\mathrm{A}$

La fonction φ est dérivable sur $[a;b]$ et $\varphi(b)=0$

En posant $\mathrm{A}\overset{\text{def}}{=}\frac{(p+1)!}{(b-a)^{p+1}}\left(f(b)-\sum_{k=0}^{p}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right)$ on a de plus $\varphi(a)=0$.

Ainsi, le théorème de Rolle assure qu'il existe un réel $c\in]a;b[$ tel que $\varphi'(c)=0$.

Or $\forall x\in[a;b]$, $\varphi'(x)=-f'(x)-\sum_{k=1}^{p}\left(-\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x)+\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k+1)}(x)\right)+\frac{(b-x)^p}{p!}\mathrm{A}$

$$\varphi'(x)=-f'(x)+\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k+1)}(x)-\sum_{k=1}^{p}\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k+1)}(x)+\frac{(b-x)^p}{p!}\mathrm{A}$$

$$\varphi'(x)=-\frac{(b-x)^p}{p!}f^{(p+1)}(x)+\frac{(b-x)^p}{p!}\mathrm{A}$$

$$\varphi'(x)=\frac{(b-x)^p}{p!}\left(\mathrm{A}-f^{(p+1)}(x)\right)$$

Ainsi puisque $\varphi'(c)=0$, et que $(b-c)\neq 0$, on a : $\mathrm{A}=f^{(p+1)}(c)$

Donc $\frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+1)}(c)=f(b)-\sum_{k=0}^{p}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$ □

Formule de Taylor avec reste intégral : global

Si $f:\mathrm{I}\to\mathbb{C}$ est de classe C^{p+1} sur l'intervalle I alors pour $a\in\mathrm{I}$ on a :

$$\forall x\in\mathrm{I},\ f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^p}{p!}f^{(p)}(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^p}{p!}f^{(p+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration : Par récurrence sur p : $\mathrm{HR}(p)$ est la proposition précédente

Initialisation : Si f est de classe C^1 sur l'intervalle I alors $\int_a^x\frac{(x-0)^0}{0!}f'(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$ d'après le théorème fondamental de l'analyse, donc $\mathrm{HR}(0)$ est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $\mathrm{HR}(p)$ soit vérifiée alors si f est de classe C^{p+2} sur l'intervalle I, alors pour $x\in\mathrm{I}$, $u:t\mapsto-\frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}$ et la fonction $v:t\mapsto f^{(p+1)}(t)$ étant de classe C^1 sur l'intervalle $[a;x]$, la formule d'intégration par parties donne :

$$\int_a^x\underbrace{\frac{(x-t)^p}{p!}}_{=u'(t)}\underbrace{f^{(p+1)}(t)}_{=v(t)}\mathrm{d}t=\left[\underbrace{-\frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}}_{=u(t)}\underbrace{f^{(p+1)}(t)}_{=v(t)}\right]_{t=a}^{t=x}-\int_a^x\underbrace{-\frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}}_{=u(t)}\underbrace{f^{(p+2)}(t)}_{=v'(t)}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{(x-a)^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+1)}(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Donc $\mathrm{HR}(p+1)$ est vérifiée.

Conclusion : pour tout entier naturel $\mathrm{HR}(p)$ est vérifiée.□

Formule de Taylor pour les polynômes : décomposition dans une base

$$\text{Si } \mathrm{P}\in\mathbb{C}_n[\mathrm{X}] \text{ alors pour } a\in\mathbb{C},\ \mathrm{P}(\mathrm{X})=\mathrm{P}(a)+\mathrm{P}'(a)(\mathrm{X}-a)+\ldots+\frac{\mathrm{P}^{(n)}(a)}{n!}(\mathrm{X}-a)^n$$

Démonstration : soit f une fonction polynomiale f de degré n. La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et si l'entier $p>n$ alors $f^{(p)}=0$ donc la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $p+1$ assure l'égalité précédente.

Une démonstration algébrique consiste à considérer l'égalité précédente comme une décomposition du polynôme P dans une base.

$B_a=(1;X-a;(X-a)^2,\dots;(X-a)^n)$ est une famille libre de $\mathbb{C}_n[X]$ car échelonnée.

De plus $\mathrm{Card}(B_a)=n+1$ or $dim(\mathbb{C}_n[X])=n+1$ donc B_a est une base de $C_n[X]$.

Ainsi, il existe $(\alpha_0;\dots;\alpha_n)\in\mathbb{C}^n$ tel que $P(X)=\alpha_0+\alpha_1(X-a)+\dots+\alpha_n(X-a)^n$

Or $\forall k\in[\![0;n]\!]$, et $\forall p\in[\![0;k]\!]$ $\left((X-a)^k\right)^{(p)}=k(k-1)\dots(k-(p-1))(X-a)^{k-p}=\dfrac{k!}{(k-p)!}(X-a)^{k-p}$

si $p>k$ alors $\left((X-a)^k\right)^{(p)}=0$

Par dérivation successives : $\forall p\in[\![0;n]\!]$, $P^{(p)}(X)=\alpha_p p!+\alpha_{p+1}\dfrac{(p+1)!}{(p+1-p)!}(X-a)^{p+1-p}+\dots+\alpha_n\dfrac{(n)!}{(n-p)!}(X-a)^{n-p}$

D'où, $P^{(p)}(0)=\alpha_p p!$ ainsi, $\alpha_p=\dfrac{P^{(p)}(0)}{p!}$ □

<u>Série de Taylor en 0</u> : unicité du développement.

Soit I un intervalle contenant 0, si $f:I\to\mathbb{C}$ est développable en série entière au voisinage de 0 alors :

il existe $R>0$ tel que $]-R;R[\subset I$ et $\forall x\in]-R;R[$, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Démonstration : Soit la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R' et $R\in]0;R'[$ tel que $]-R;R[\subset I$ alors

$\forall x\in]-R;R[$, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ alors par dérivation terme à terme à l'intérieur de l'intervalle de convergence :

$\forall p\in\mathbb{N}$, $\forall x\in]-R;R[$, $f^{(p)}(x)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n\right)^{(p)}=\sum_{n=p}^{+\infty}n(n-1)\dots(n-(p-1))a_n x^{n-p}$

Donc $\forall p\in\mathbb{N}$, $f^{(p)}(0)=p!a_p$ c'est-à-dire $a_p=\dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$ □

Fonctions de plusieurs variables réelles

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a=(a_1;\dots;a_p)\in\Omega$ et $h=(h_1;\dots;h_p)$ tel que $a+h\in\Omega$

Remarque préliminaires : en posant $\boxed{(x_1;\dots;x_p)=(a_1+h_1;\dots;a_p+h_p)}$ c'est-à-dire $\boxed{(h_1;\dots;h_p)=(x_1-a_1;\dots;x_p-h_p)}$

on a $\boxed{(x_1;\dots,;x_p)\to(a_1;\dots;a_p)}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\|(h_1;\dots;h_p)\|\to 0}$

Formule de Taylor à l'ordre 0.

Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$, en notant $f(x_1;\dots;x_p)=\begin{pmatrix}f_1(x_1;\dots;x_p)\\ \vdots\\ f_n(x_1;\dots;x_p)\end{pmatrix}$ on a :

f est continue en $a=(a_1;\dots;a_p)\in\Omega$

$\Leftrightarrow$

$\forall h=(h_1;\dots;h_p)\in\mathbb{R}^p$ tel que $a+h\in\Omega$, $\begin{pmatrix}f_1(a_1+h_1;\dots;a_p+h_p)\\ \vdots\\ f_n(a_1+h_1;\dots;a_p+h_p)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(a_1;\dots a_p)\\ \vdots\\ f_n(a_1;\dots a_p)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}o(\|(h_1;\dots;h_p)\|)\\ \vdots\\ o(\|(h_1;\dots;h_p)\|)\end{pmatrix}$

i.e. $f(a+h)=f(a)+o(\|h\|)$

Démonstration : par définition de la limite d'une fonction de plusieurs variables à valeurs dans $\mathbb{R}^n$:

$\lim_{h\to 0_{\mathbb{R}^p}}(f(a+h)-f(a))=0\Leftrightarrow\lim_{\|h\|\to 0}\|f(a+h)-f(a)\|=0\Leftrightarrow\forall i\in[0;n],\lim_{\|h\|\to 0}f_i(a+h)-f_i(a)=0$ □

Formule de Taylor à l'ordre 1: existence et unicité du développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de classe C^1 .

Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ de classe C^1 sur Ω (ie. $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$,..., $\dfrac{\partial f}{\partial x_p}$ sont continues sur Ω).

En notant $f(x_1;\ldots;x_p)=\begin{pmatrix} f_1(x_1;\ldots;x_p)\\ \vdots \\ f_n(x_1;\ldots;x_p)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$, on a l'équivalence suivante :

Il existe $\mathrm{M}=\begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,p}\\ \vdots & & \vdots\\ \vdots & & \vdots\\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,p}\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ tel que $\forall h=(h_1;\ldots;h_p)\in\mathbb{R}^p$ vérifiant $a+h\in\Omega$ on ait :

$$\begin{pmatrix} f_1(a_1+h_1;\ldots;a_p+h_p)\\ \vdots\\ f_n(a_1+h_1;\ldots;a_p+h_p)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(a_1;\ldots a_p)\\ \vdots\\ f_n(a_1;\ldots a_p)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,p}\\ \vdots & & \vdots\\ \vdots & & \vdots\\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1\\ \vdots\\ h_p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} o(\|(h_1;\ldots;h_p)\|^2)\\ \vdots\\ o(\|(h_1;\ldots;h_p)\|^2)\end{pmatrix}$$

i.e. $[f(a+h)]=[f(a)]+\mathrm{M}\times[h]+[o(\|h\|^2)]$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,p}\\ \vdots & & \vdots\\ \vdots & & \vdots\\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a_1;\ldots;a_p) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(a_1;\ldots;a_p)\\ \vdots & & \vdots\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a_1;\ldots;a_p) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_p}(a_1;\ldots;a_p)\end{pmatrix}\quad \text{i.e. } \mathrm{M}=\mathrm{J}_f(a)$$

On peut retenir l'expression utilisant la différentielle : $\boxed{f(a+h)=f(a)+df_a(h)+o(\|h\|^2)}$

Démonstration : Pour <u>l'existence</u>, supposons pour simplifier l'écriture $p=3$ et $n=1$ (le cas p quelconque se généralise facilement et pour n quelconque il suffit de travailler sur les n fonctions coordonnées)

$f(a+h)-f(a)=f(a_1+h_1;a_2+h_2;a_3+h_3)-f(a_1;a_2;a_3)$

$=(f(a_1+h_1;a_2+h_2;a_3+h_3)-f(a_1;a_2+h_2;a_3+h_3))+(f(a_1;a_2+h_2;a_3+h_3)-f(a_1;a_2;a_3+h_3))-(f(a_1;a_2;a_3+h_3)-f(a_1;a_2;a_3))$

La fonction $t\mapsto f(t;a_2+h_2;a_3+h_3)$ étant dérivable au voisinage de a_1 , le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un réel $\alpha_1\in[0;1]$ (dépendant éventuellement de a_2+h_2 et de a_3+h_3) tel que

$$f(a_1+h_1;a_2+h_2;a_3+h_3)-f(a_1;a_2+h_2;a_3+h_3)=h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\alpha_1 h_1;a_2+h_2;a_3+h_3)$$

La dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ étant supposée continue en a on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\alpha 1\, h_1;a_2+h_2;a_3+h_3)=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1;a_2;a_3)+\underset{\|h\|\to 0}{o}(1)$

La fonction $t\mapsto f(a_1;t;a_3+h_3)$ étant dérivable au voisinage de a_2 , le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un réel $\alpha_2\in[0;1]$ (dépendant éventuellement de a_3+h_3) tel que :

$$f(a_1;a_2+h_2;a_3+h_3)-f(a_1;a_2;a_3+h_3)=h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1;a_2+\alpha_2 h_2;a_3+h_3)$$

Or la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ étant supposée continue en a , on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1;a_2+\alpha_2 h_2;a_3+h_3)=\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1;a_2;a_3)+\underset{\|h\|\to 0}{o}(1)$

La fonction $t\mapsto f(a_1;a_2;t)$ étant dérivable au voisinage de a_3 , le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un réel $\alpha_3\in[0;1]$ tel que : $f(a_1;a_2;a_3+h_3)-f(a_1;a_2;a_3)=h_3\dfrac{\partial f}{\partial x_3}(a_1;a_2;a_3+\alpha_3 h_3)$

Or la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}$ étant supposée continue en a , on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}(a_1;a_2;a_3+\alpha_3 h_3)=\dfrac{\partial f}{\partial x_3}(a_1;a_2;a_3)+\underset{\|h\|\to 0}{o}(1)$

Ainsi : $f(a+h)-f(a)=h_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)+h_2\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)+h_3\dfrac{\partial f}{\partial x_3}(a)+(h_1+h_2+h_3)\underset{\|h\|\to 0}{o}(1)$

De plus $|h_1+h_2+h_3|\leqslant|h_1|+|h_2|+|h_3|\leqslant 3\|h\|$ donc $(h_1+h_2+h_3)\underset{\|h\|\to 0}{o}(1)=\underset{\|h\|\to 0}{o}(\|h\|)$

Pour l'unicité : soient $\mathrm{A}\in\mathrm{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^n)$ et $\mathrm{B}\in\mathrm{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^n)$ telles que $\forall\, h\in\mathbb{R}^p$ tel que $a+h\in\Omega$,
$\mathrm{A}(h)+o(\|h\|)=\mathrm{B}(h)+o(\|h\|)$ alors $(\mathrm{A}-\mathrm{B})(h)=o(\|h\|)$ donc pour $\|h\|\neq 0$, $(\mathrm{A}-\mathrm{B})\left(\dfrac{1}{\|h\|}h\right)=o(1)$

Par passage à la limite quand $\|h\|$ tend vers 0, et par continuité de l'application linéaire $\mathrm{A}-\mathrm{B}$, l'application linéaire $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ doit s'annuler pour tous les vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^p$ ce qui impose $\mathrm{A}-\mathrm{B}=0_{\mathrm{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^n)}$ donc A=B. □

<u>Application au plan tangent à une surface d'équation :</u> $z=f(x;y)$

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ $(a_1;a_2)\in\mathbb{R}^2$ et $(u;v)\in\mathbb{R}^2$,

$$f(a_1+h_1;a_2+h_2)=f(a_1;a_2)+h_1\times\frac{\partial f}{\partial x}(a_1;a_2)+h_2\times\frac{\partial f}{\partial y}(a_1;a_2)+o\left(\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}\right)$$

Ainsi, au voisinage du point $(a_1;a_2;f(a_1;a_2))$ de l'espace on a :

$$\begin{pmatrix} a_1+h_1 \\ a_2+h_2 \\ f(a_1+h_1;a_2+h_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ f(a_1;a_2)\end{pmatrix}+h_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1;a_2)\end{pmatrix}+h_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1;a_2)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ o\left(\sqrt{{h_1}^2+{h_2}^2}\right)\end{pmatrix}$$

Le plan tangent à la surface d'équation $z=f(x;y)$ au point $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ f(a_1;a_2)\end{pmatrix}$ est donc dirigé par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1;a_2)\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1;a_2)\end{pmatrix}$.

<u>Application au plan tangent à une nappe paramétrée</u>

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, on note $f(u;v)=\begin{pmatrix} x(u;v) \\ y(u;v) \\ z(u;v)\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x(u_0+h_1;v_0+h_2) \\ y(u_0+h_1;v_0+h_2) \\ z(u_0+h_1;v_0+h_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x(u_0;v_0) \\ y(u_0;v_0) \\ z(u_0;v_0)\end{pmatrix}+h_1\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0;v_0) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0;v_0) \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0;v_0)\end{pmatrix}+h_2\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0;v_0) \\ \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0;v_0) \\ \dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0;v_0)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} o\left(\sqrt{(h_1)^2+(h_2)^2}\right) \\ o\left(\sqrt{(h_1)^2+(h_2)^2}\right) \\ o\left(\sqrt{(h_1)^2+(h_2)^2}\right)\end{pmatrix}$$

Le plan tangent à la surface paramétrée par f au point $f(u_0;v_0)$ est donc dirigé par les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0;v_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0;v_0)$.

<u>Application à une courbe du plan définie implicitement</u>

Pour la courbe $\mathscr{C}$ définie dans le plan par une équation $\mathrm{F}(x;y)=0$, où F est de classe C^1 sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$.

On considère un point $(x_0;y_0)\in\mathscr{C}$ et on pose $(x;y)=(x_0+h_1;y_0+h_2)\in\Omega$ ainsi on a :

$$\mathrm{F}(x;y)=\mathrm{F}(x_0;y_0)+(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0)+(y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0)+o(\|(x-x_0;y-y_0)\|)$$

Or $\mathrm{F}(x_0;y_0)=0$ et $\mathrm{M}(x;y)\in\Sigma\Leftrightarrow\mathrm{F}(x;y)=0$

$$\mathrm{M}(x;y)\in\Sigma\ \Rightarrow\ 0=\underbrace{(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0)+(y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0)}_{\text{équation cartésienne de la tangente à C au point de coordonnées }(x_0;\,y_0)}+o(\|(x-x_0;y-y_0)\|)$$

On obtient une approximation affine de l'équation vérifiée par les coordonnées des points appartenant à $\mathscr{C}$ au voisinage de $(x_0;y_0)$. Ainsi, la tangente à la courbe définie par $\mathrm{F}(x;y)=0$ au point $(x_0;y_0)$ est normale au gradient de F évalué au point $(x_0;y_0)$: $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0);\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0)\right)$.

Application à une surface de l'espace définie implicitement

Pour la surface Σ définie dans l'espace par une équation $\mathrm{F}(x;y;z)=0$, où F est de classe C^1 sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^3$.
On considère un point $(x_0;y_0;z_0)\in\Sigma$ et on pose $(x;y;z)=(x_0+h_1;y_0+h_2;z_0+h_3)\in\Omega$ ainsi on a :

$$\mathrm{F}(x;y;z)=\mathrm{F}(x_0;y_0;z_0)+(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)+(y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)+(z-z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)+o(\|(x-x_0;y-y_0;z-z_0)\|)$$

Or $\mathrm{F}(x_0;y_0;z_0)=0$ et $\mathrm{M}(x;y;z)\in\Sigma\Leftrightarrow\mathrm{F}(x;y;z)=0$

$$\mathrm{M}(x;y;z)\in\Sigma \Rightarrow 0=\underbrace{(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)+(y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)+(z-z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)}_{\text{équation cartésienne du plan tangent à } \Sigma \text{ au point de coordonnées } (x_0;y_0;z_0)}+o(\|(x-x_0;y-y_0;z-z_0)\|)$$

On obtient une approximation affine de l'équation vérifiée par les coordonnées des points appartenant à Σ au voisinage de $(x_0;y_0;z_0)$.
Ainsi, le plan tangent à la surface définie par $\mathrm{F}(x;y;z)=0$ au point $(x_0;y_0;z_0)$ est normal au gradient de F évalué au point $(x_0;y_0;z_0)$: $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0;z_0);\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0;z_0);\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)\right)$.

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a\in\Omega$ et une fonction numérique $f\in\mathrm{C}^2(\Omega;\mathbb{R})$.
$\forall h=(h_1;h_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a+h\in\Omega$,

$$f(a+h)=f(a)+\underbrace{h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a)+h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a)}_{\text{partie linéaire}}+\underbrace{\frac{1}{2}\left((h_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)+2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)+(h_2)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\right)}_{\text{partie quadratique}}+o(\|h\|^2)$$

Formule admise.

On peut retenir en utilisant les différentielles : $\boxed{f(a+h)=f(a)+df_a(h)+\frac{1}{2}(d^2f_a(h))(h)+o(\|h\|^2)}$

Ou en utilisant la matrice hessienne $\mathrm{H}_f\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}$: $\boxed{f(a+h)=f(a)+\mathrm{J}_f(a)[h]+\frac{1}{2}{}^t[h]\mathrm{H}_f(a)[h]+o(\|h\|^2)}$

Application à l'étude des extrema locaux.

Soit $f\in\mathrm{C}^2(\Omega;\mathbb{R})$ si f admet un extremum en $a\in\Omega$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}(a)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a)=0$ donc :

$$f(a+h)-f(a)=\frac{1}{2}{}^t[h]\mathrm{H}_f(a)[\mathrm{H}]+o(\|h\|^2)$$

Le signe de $f(a+h)-f(a)$ est alors localement déterminé par la forme quadratique de matrice $\mathrm{H}_f(a)$ ...