Séries

1. Séries de nombres réels ou complexes.
   - a) Convergence....p.1
   - b) Séries à termes réels positifs....p.4
   - c) Convergence absolue....p.8
   - d) Séries alternées....p.9
2. Séries entières
   - a) Convergence d'une série entière....p.10
   - b) Somme d'une série entière d'une variable réelle....p.14
   - c) Exponentielle complexe....p.20
3. Séries de Fourier
   - a) Définitions....p.21
   - b) Formule de Parseval....p.25
   - c) Convergence d'une série de Fourier....p.26

---

1. Séries de nombres réels ou complexes

a) Convergence

Définition d'une série numérique : soit $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels ou de complexes.

La série de terme général a_n notée $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ est la suite définie par $\sum_{n\geqslant n_0} a_n \overset{\text{def}}{=} (s_n)_{n\geqslant n_0}$ où $s_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=n_0}^{n} a_k$.

Pour tout entier $n\geqslant n_0$, chaque terme $s_n=\sum_{k=n_0}^{n} a_k$ est appelé somme partielle d'indice n.

Remarque : $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ est souvent notée $\sum a_n$.

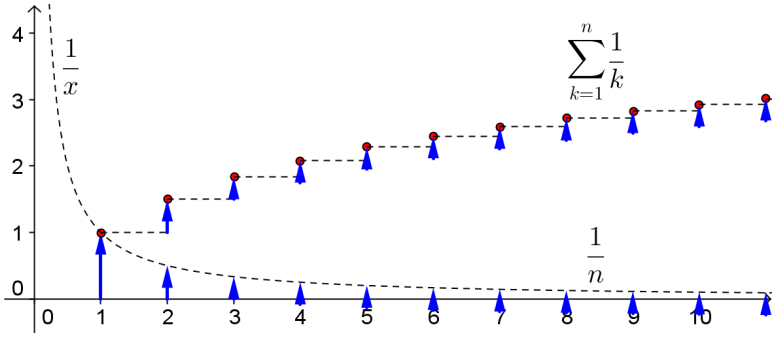
On peut retenir : $\sum a_n=(a_0\,;a_0+a_1\,;a_0+a_1+a_2\,;a_0+a_1+a_2+a_3\,;\ldots)$

D'un point de vue algorithmique, la définition par récurrence des sommes partielles $\begin{cases} s_0=a_0 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ s_{n+1}=s_n+a_{n+1} \end{cases}$ permet le calcul des sommes partielles par l'intermédiaire d'une structure itérative :

$s := a_0$
pour k allant de 1 à n
  $s := s + a_k$
fin pour

Exemples : une série ayant pour terme général $a_n=a_0+n\times r$ a pour somme partielle d'indice n : $\sum_{k=0}^{n} a_k=\ldots$

La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est appelé série harmonique car son terme général est la moyenne harmonique[1] des termes qui l'encadrent : ...



1 H est la moyenne harmonique de a et b si et seulement si $\frac{2}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

Définition d'une série numérique convergente : soit $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels ou de complexes.

La série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ est dite convergente si et seulement si la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente.

Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ est convergente alors sa limite est appelée somme de la série notée $\boxed{\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} a_k}$

Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ n'est pas convergente elle est dite divergente.

⚠ $\sum a_n$ est une série, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est un nombre (réel ou complexe).

Remarques : l'expression « nature d'une série » désigne son caractère convergent ou divergent.

Cas des séries de complexes : Soit $(z_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres complexes.

La série $\sum_{n\geqslant n_0} z_n$ est convergente si et seulement si les séries $\sum_{n\geqslant n_0} \Re\mathrm{e}(z_n)$ et $\sum_{n\geqslant n_0} \Im\mathrm{m}(z_n)$ sont convergentes.

Démonstration : cf suites de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne.□

Condition nécessaire pour la convergence d'une série numérique : soit $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels ou de complexes.

Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ est convergente alors la suite $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Si la suite $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ n'est pas convergente ou si $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \neq 0$ alors la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ est dite grossièrement divergente.

Démonstration : soit pour tout entier naturel $n\geqslant n_0$ la somme partielle $s_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=n_0}^{n} a_n$.

$s_n - s_{n-1} = \ldots$

Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ est convergente alors les suites (s_n) et (s_{n-1}) sont convergentes vers la même limite donc...

□

⚠ Cette condition n'est pas suffisante pour assurer la convergence d'une série numérique. Par ailleurs, cette condition nécessaire n'est pas transposable aux intégrales impropres : il existe des intégrales impropres du type $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergentes (et même absolument convergentes) pour lesquelles $f(t)$ n'admet pas de limite quand t tend vers $+\infty$.
Exemple : le terme général de la série harmonique tend vers 0 et pourtant la série harmonique est divergente.
En effet, supposons, par l'absurde, qu'il existe un réel l tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = l$.

En notant les sommes partielles $s_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ s_{2n} - s_n = \ldots$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ s_{2n} - s_n \geqslant \frac{1}{2}$. La suite $(s_{2n})_{n\geqslant 1}$ est une suite extraite de la suite $(s_n)_{n\geqslant 1}$ donc ...

□

Définition du reste d'une série convergente : soit $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels ou de complexes telle que la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ soit convergente. Le reste d'indice $n\geqslant n_0$ est le nombre noté $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ défini par $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k - \sum_{k=n_0}^{n} a_k$.

Propriété asymptotique des restes d'une série convergente : soit $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels ou de complexes telle que la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ soit convergente. La suite des restes d'indice n est convergente et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n = 0$.

Remarque : le comportement asymptotique des restes d'une série convergente permet d'évaluer sa vitesse de convergence.

Exemple : si $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$ alors $\sum_{k=n_0}^{10} a_k$ est une approximation de $\sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k$ avec une précision ...

Opérations sur les séries numériques convergentes : soient $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(b_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites de réels ou de complexes, λ un scalaire (réel ou complexe) et $(z_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de complexes.

Si $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ est convergente alors la série $\sum_{n\geqslant n_0} \lambda a_n$ est convergente et $\sum_{n\geqslant n_0}^{+\infty} \lambda a_n=\lambda\sum_{n\geqslant n_0}^{+\infty} a_n$

Si les séries $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} b_n$ sont convergentes alors la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n+b_n$ est convergente et $\sum_{n\geqslant n_0}^{+\infty} a_n+b_n=\sum_{n\geqslant n_0}^{+\infty} a_n+\sum_{n\geqslant n_0}^{+\infty} b_n$

L'ensemble des séries numériques réelles convergentes est un $\mathbb{R}$ _espace vectoriel et l'application qui à toute série numérique associe sa limite est une forme linéaire.

Si $\sum_{n\geqslant n_0} z_n$ est convergente alors $\mathrm{Re}\left(\sum_{n\geqslant n_0}^{+\infty} z_n\right)=\sum_{n\geqslant n_0}^{+\infty}\mathrm{Re}(z_n)$ et $\mathrm{Im}\left(\sum_{n\geqslant n_0}^{+\infty} z_n\right)=\sum_{n\geqslant n_0}^{+\infty}\mathrm{Im}(z_n)$.

Conséquence : Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ est convergente et la série $\sum_{n\geqslant n_0} b_n$ est divergente alors la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n+b_n$ est...

En effet si $\sum_{n\geqslant n_0} a_n+b_n$ était convergente alors $\sum_{n\geqslant n_0} a_n+b_n-a_n$ serait...

⚠ Si les séries $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} b_n$ sont divergentes alors on ne peut rien conclure sur la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n+b_n$.

Définition des séries géométriques : les séries géométriques sont de la forme $\sum q^n$ avec $q\in\mathbb{C}$.

Caractérisation des séries géométriques convergentes : soit $q\in\mathbb{C}$.

La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q|<1$.

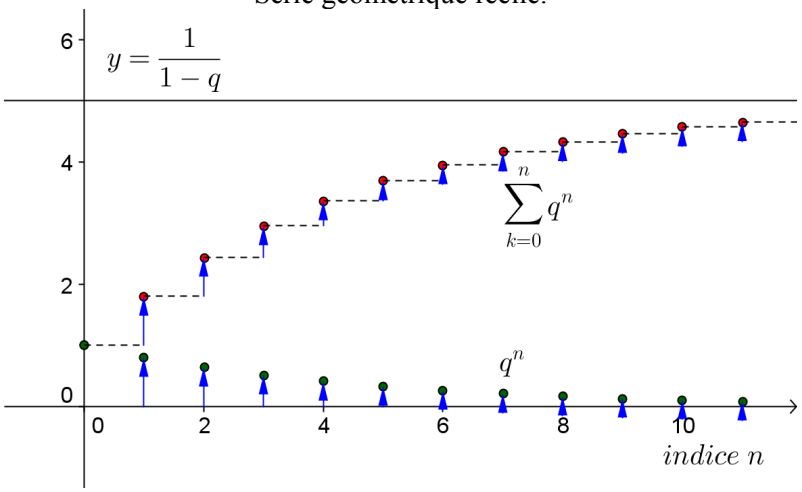
Si la série géométrique $\sum q^n$ converge alors $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n=\frac{1}{1-q}$

Démonstration : Si $q=1$ alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $1+q+q^2+\ldots+q^n=\ldots$
soit $q\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $1+q+q^2+\ldots+q^n=\ldots$
Si $|q|<1$ alors ...
Si $|q|\geqslant 1$ alors …

□

Remarque : une série géométrique converge à vitesse géométrique : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} q^n=\frac{q^{n+1}}{1-q}=\underset{+\infty}{O}(q^n)$

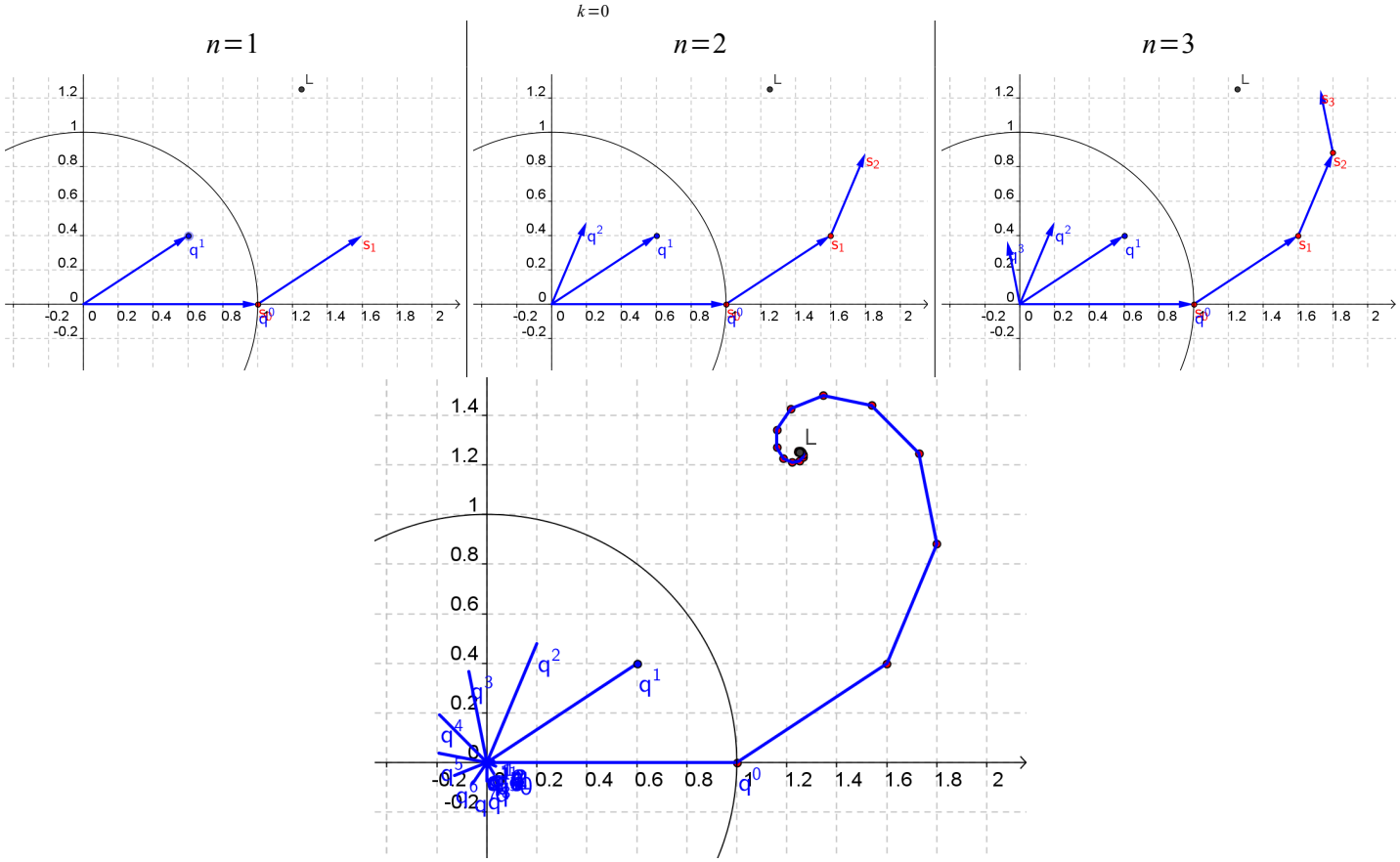
Série géométrique réelle.



Série géométrique complexe.

Dans le plan complexe, les vecteurs représentés ci-dessous ont pour affixe le terme général de la série : q^n

Les points ont pour affixe les sommes partielles : $\sum_{k=0}^{n} q^k$



b) Séries à termes réels positifs

Condition nécessaire et suffisante pour la convergence d'une série à termes positifs : soit $(x_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels positifs ou nuls.

La série $\sum_{n\geqslant n_0} x_n$ est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\geqslant n_0}$ est majorée.

Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} x_n$ est convergente alors $\sum_{k=n_0}^{+\infty} x_k = \sup_{n\geqslant n_0} \sum_{k=n_0}^{n} x_k$.

Démonstration : si pour tout entier $n\geqslant n_0$, $x_n\geqslant 0$ alors la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante donc...

□

⚠ Ce critère n'est pas suffisant si le terme général n'est pas positif. Contre-exemple : $\sum (-1)^n$ ...

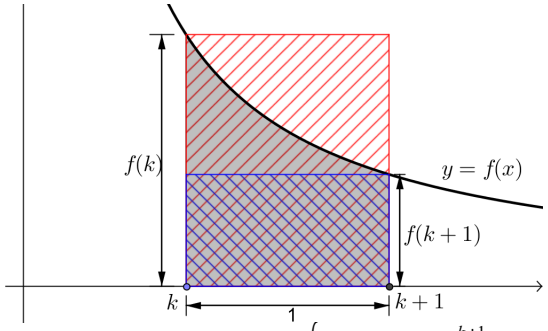
Comparaison série intégrale : soit f une fonction positive, décroissante et continue par morceaux sur l'intervalle $[n_0;+\infty[$.

La série $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ et l'intégrale impropre $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ converge alors les restes d'indice n sont encadrés par : $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{n}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

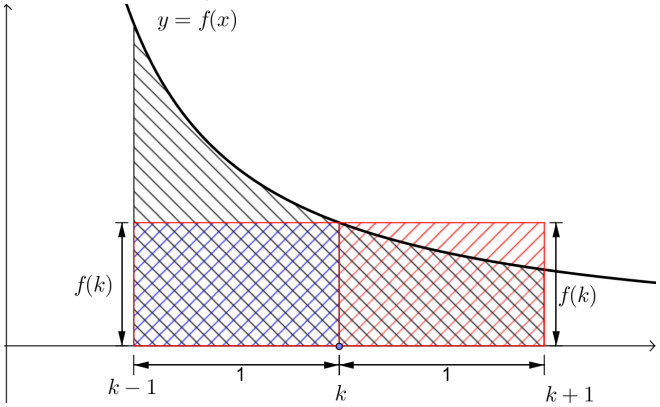
Démonstration : pour tout entier $k\geqslant n_0$, on a : $\forall t\in[k;k+1]$, $\ldots\leqslant f(t)\leqslant\ldots$

Donc, d'après l'inégalité de la moyenne, pour tout entier $k\geqslant n_0$: $\ldots\leqslant\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\ldots$



Ainsi en écrivant cet encadrement pour k et $k-1 \geqslant n_0$, on a : $\begin{cases} f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \\ f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k-1) \end{cases}$

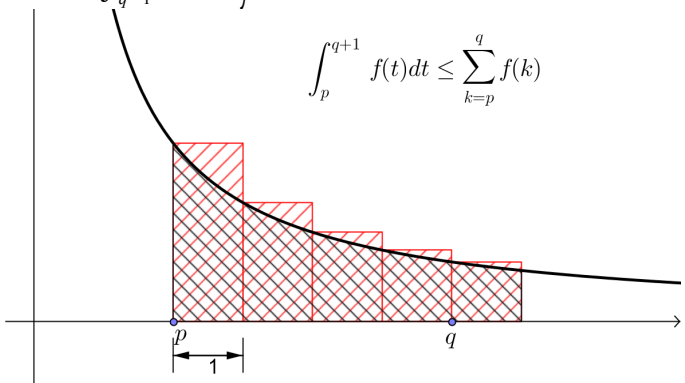
Donc pour tout $k \geqslant n_0+1$, $\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$



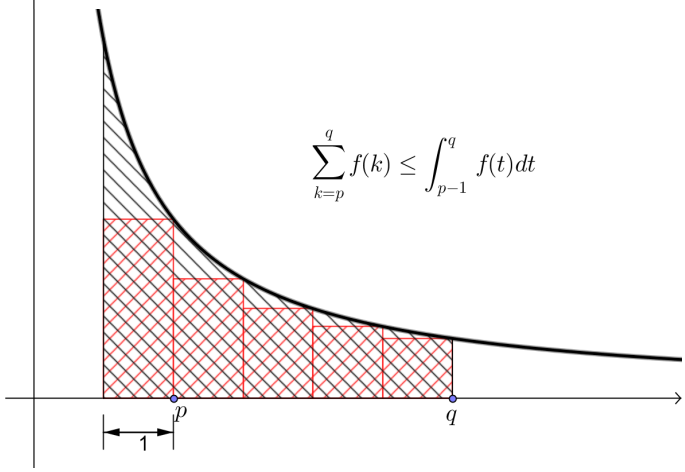
Par sommation pour k allant de $p > n_0+1$ à $q > p$ et en appliquant la relation de Chasles pour les intégrales,

$$\left.\begin{array}{l} \int_p^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(p) \leqslant \int_{p-1}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t \\ \int_{p+1}^{p+2} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(p+1) \leqslant \int_p^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t \\ \vdots \\ \int_q^{q+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(q) \leqslant \int_{q-1}^{q} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right\} \Rightarrow \int_p^{q+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=p}^{q} f(k) \leqslant \int_{p-1}^{q} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Minoration des sommes partielles :



Majoration des sommes partielles :



Si l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente alors...

Si l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente alors... □

Remarque : Ce critère étant asymptotique, il suffit de considérer, pour un certain $a \geqslant n_0$, l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

Exemple : application à la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est continue, positive et décroissante (à démontrer) sur $[2;+\infty[$, le critère de comparaison série-intégrale assure que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ est de même nature que l'intégrale impropre $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$

Pour $A>2$, $\int_2^A \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = [\ln(\ln(x))]_2^A = \ln(\ln(A)) - \ln(\ln 2)$, or $\lim\limits_{A\to+\infty} \ln(A) = +\infty$

Ainsi, l'intégrale impropre $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ est divergente donc la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ est divergente.

⚠ Ce critère ne s'applique pas aux fonctions non-monotones : par exemple pour $f(x) = 1-\cos(2n\pi)$, la série $\sum f(n)$ est convergente car $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \ldots$ et pourtant l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ en divergente.

Définition des séries de Riemann : les séries de Riemann sont les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple : la série harmonique est une série de Riemann pour $\alpha = \ldots$.

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ pour $\alpha = \ldots$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour $\alpha = \ldots$

Caractérisation des séries de Riemann convergentes : soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration :
Si $\alpha \leqslant 0$ alors...
Si $0 < \alpha \leqslant 1$ alors...
Si $1 < \alpha$ alors... □

Exemple : la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente et $\sum_{n\geqslant 1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (calculée entre autres grâce aux séries de Fourier)

Application au développement asymptotique d'échelle de comparaison $\frac{1}{n^k}$. :

Soit deux réels α et β et une série $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ telle que : $x_n = \alpha\frac{1}{n} + \beta\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Si $\alpha \neq 0$ alors, la série de terme général $\alpha\frac{1}{n}$ est divergente car...

La série de terme général $\beta\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est convergente car …

Donc la série $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ est convergente si et seulement si $\alpha = 0$.

⚠ Une série du type $\sum o\left(\frac{1}{n}\right)$ peut être convergente ou divergente.

Exemples : $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ or la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.

$\frac{1}{n\ln(n)} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ or la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ est divergente (cf. précédement).

Comparaison des séries à termes positifs : soit (x_n) et (y_n) deux suites de réels positifs.

Critère de minoration par une série divergente : $\left.\begin{array}{l}\forall n\in\mathbb{N},\ x_n\leqslant y_n\\ \sum x_n \text{ est divergente}\end{array}\right\}\Rightarrow \sum y_n \text{est divergente}$

Critère de majoration par une série convergente : $\left.\begin{array}{l}\forall n\in\mathbb{N},\ x_n\leqslant y_n\\ \sum y_n \text{ est convergente}\end{array}\right\}\Rightarrow \sum x_n \text{ est convergente}$

⚠ Ce critère étant asymptotique, il suffit de considérer la positivité et la comparaison à partir d'un certain rang.
Démonstration : On démontre par récurrence que la comparaison des termes s'étend aux sommes partielles...

Critère d'équivalence pour les séries à termes positifs : soit (x_n) et (y_n) deux suites de réels positifs.

Si $x_n \underset{+\infty}{\sim} y_n$ (équivalences des termes généraux) alors les séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont de même nature.

Démonstration : si $x_n \underset{+\infty}{\sim} y_n$ alors il existe une suite (α_n) telle que $\begin{cases}x_n=\alpha_n\times y_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=1\end{cases}$

Donc il existe un rang N tel que $\forall n\geqslant N,\ 0{,}9<\alpha_n<1{,}1$
Donc...

□

⚠ Ce critère ne s'applique pas aux séries dont le terme général change de signe.

Contre-exemple : soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ définies par $x_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$ et $y_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{n}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{x_n}{y_n}=\ldots$

Donc $x_n \underset{+\infty}{\sim} y_n$

Or, le critère spécial des séries alternées (plus loin) assure que les séries $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$ convergent.

Donc la série $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ …

Et la série $\sum_{n\geqslant 1} y_n$ ...

Critère d'équivalence avec une série de Riemann :

Soit (x_n) une suite de réels telle que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$. La série $\sum x_n$ est convergente si et seulement si $\alpha>1$.

Remarque : inutile ici de vérifier que la série est à termes positifs car $x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$ l'impose à partir d'un certain rang.

En effet, si $x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$ alors...

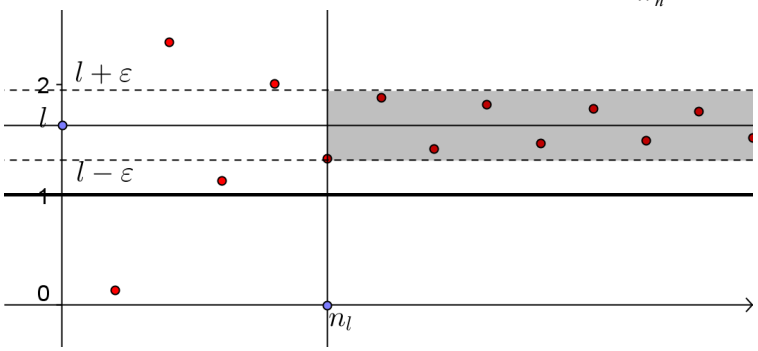
Critère de comparaison à une série géométrique : la règle de d'Alembert. Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs à partir d'un certain rang n_0 telle que la suite des quotients $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ soit convergente, on note $l \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

Si $l>1$ alors la série $\sum x_n$ est grossièrement divergente.

Si $l<1$ alors la série $\sum x_n$ est convergente.

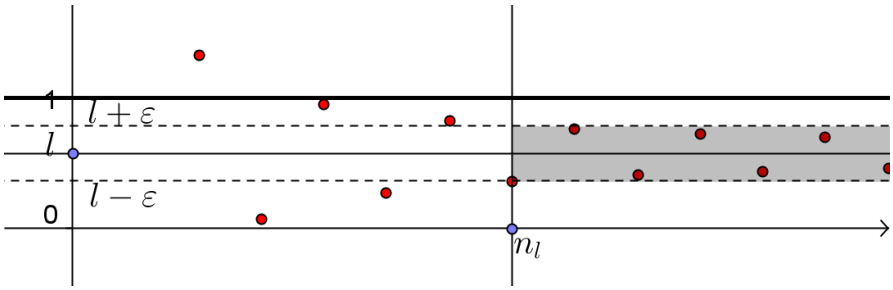
Démonstration :

Si $l>1$ alors pour $\varepsilon=\dfrac{l-1}{2}>0$, il existe un rang $n_l \geqslant n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_l$, $l-\varepsilon<\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<l+\varepsilon$



Or $l-\varepsilon>1$ car...
De plus $\forall n \geqslant n_l$, $x_n>0$ donc : $\forall n \geqslant n_l$, $(1-\varepsilon)x_n<x_{n+1}$
Ainsi, par récurrence, on démontre que $\forall n \geqslant n_l$, $(1-\varepsilon)^{n-n_l}x_{n_l}<x_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\ldots$

Si $l<1$ alors pour $\varepsilon=\dfrac{1-l}{2}$ ...



Or...

□

⚠ Pour $l=1$ tout peut arriver !
Exemples : pour la série harmonique...

Pour la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ ...

c) Convergence absolue

Définition de la convergence absolue d'une série réelle ou complexe : soit $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels ou de complexes.

La série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} a_n$ est absolument convergente si et seulement la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0}|a_n|$ est convergente.

⚠ Selon cas $|a_n|$ désigne la valeur absolue ou le module du nombre , mais dans tous les cas $\sum\limits_{n>_{n_0}}|a_n|$ est une série de réels positifs.

Condition suffisante pour assurer la convergence d'une série : soit $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels ou de complexes.

Si la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} a_n$ est absolument convergente alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} a_n$ est convergente.

Démonstration :
► Si $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels alors on l'écrit comme somme de deux suites $(p_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(q_n)_{n>n_0}$ respectivement à termes positifs et négatifs.
Pour tout entier $n\geqslant n_0$, $p_n=max(a_n;0)=\begin{cases}a_n \text{ si } a_n>0\\0 \text{ sinon}\end{cases}$ et $q_n=min(a_n;0)=\begin{cases}a_n \text{ si } a_n<0\\0 \text{ sinon}\end{cases}$ ainsi $a_n=p_n+q_n$.
Pour tout entier $n\geqslant n_0$, $0\leqslant p_n\leqslant|a_n|$, ainsi …

Pour tout entier $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant -q_n \leqslant |a_n|$, ainsi …

Conclusion : si la série $\sum_{n \geqslant n_0} a_n$ est absolument convergente alors les séries $\sum_{n \geqslant n_0} p_n$ et $\sum_{n \geqslant n_0} q_n$ sont convergentes donc...

► Si $(a_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de nombres complexes alors pour tout entier $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant |\mathrm{Re}(a_n)| < |a_n|$.

La série $\sum_{n \geqslant n_0} |\mathrm{Re}(a_n)|$ est une série de réels positifs donc : si $\sum_{n \geqslant n_0} |a_n|$ converge alors...

Ainsi, $\sum_{n > n_0} \mathrm{Re}(a_n)$ étant une suite de réels, si la série $\sum_{n \geqslant n_0} a_n$ est absolument convergente, la série $\sum_{n > n_0} \mathrm{Re}(a_n)$ est ...
De même, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant |\mathrm{Im}(a_n)| \leqslant |a_n|$ ...

□

⚠ La réciproque est fausse : il existe des séries convergentes mais non absolument convergentes.

	Séries convergentes		Séries divergentes
Séries réelles de termes ayant un signe constant	Absolument convergentes		Divergentes
Séries de réels ou de complexes quelconques.	Absolument convergentes	Semi-convergentes	Divergentes

L'objectif du programme n'est pas l'étude de la semi-convergence dans le cas général en revanche, le cas des séries alternées semi-convergentes est exigible.

d) Séries alternées

Définition des séries alternées : Soit $\sum_{n \geqslant n_0} x_n$ une série réelle.

La série $\sum_{n \geqslant n_0} x_n$ est une série alternée si et seulement si $\sum_{n \geqslant n_0} (-1)^n x_n$ est une série de termes ayant un un signe constant.

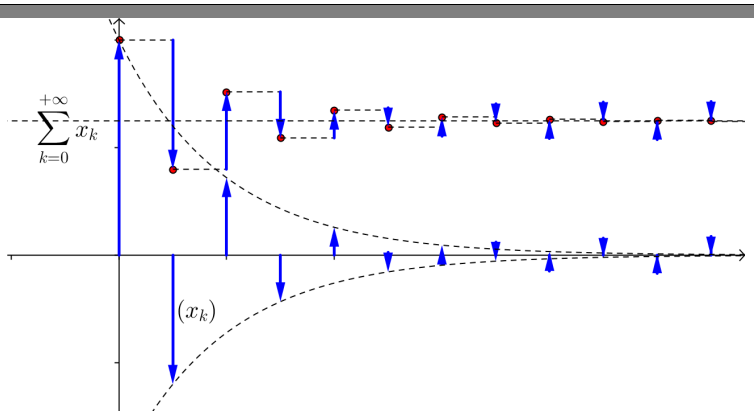
Remarque : une caractérisation équivalente est donné par : pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $x_n \times x_{n+1} \leqslant 0$.

Exemple : la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est alternée.

La série $\sum_{n \geqslant 0} \cos(n)$ n'est pas alternée car...

Critère spécial de convergence des séries alternées : Soit $\sum_{n \geqslant n_0} x_n$ une série alternée.

Si la suite des valeurs absolues $(|x_n|)_{n > n_0}$ est décroissante et si $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$, alors la série $\sum_{n \geqslant n_0} x_n$ est convergente.



Dans ce cas en notant les sommes partielles $S_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=n_0}^{n} x_k$ et la somme de la série $S \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=n_0}^{+\infty} x_k$

La somme de la série est comprise entre les sommes partielles consécutives :

Pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\begin{cases} \text{si } x_{n+1} \geqslant 0 \text{ alors } S_n \leqslant S \leqslant S_{n+1} \\ \text{si } x_{n+1} < 0 \text{ alors } S_{n+1} \leqslant S \leqslant S_n \end{cases}$

Le reste est compris entre 0 et x_{n+1} (le reste est donc du signe de x_{n+1}):

Pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\begin{cases} \text{si } x_{n+1} \geqslant 0 \text{ alors } 0 \leqslant S - S_n \leqslant x_{n+1} \\ \text{si } x_{n+1} < 0 \text{ alors } x_{n+1} \leqslant S - S_n \leqslant 0 \end{cases}$

Remarque : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} |x_n| = 0$

Démonstration : soit $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ la suite des sommes partielles : $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} x_k$.

Les suites extraites $(S_{2n})_{n \geqslant E\left(\frac{n_0}{2}\right)}$ et $(S_{2n+1})_{n \geqslant E\left(\frac{n_0-1}{2}\right)}$ sont adjacentes car : $\begin{cases} \text{l'une est croissante et l'autre est décroissante} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0 \end{cases}$

En effet pour tout entier $n \geqslant E\left(\frac{n_0}{2}\right)$, $\begin{cases} S_{2(n+1)} - S_{2n} = x_{2n+2} + x_{2n+1} \\ S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = x_{2n+3} + x_{2n+2} \end{cases}$

Si le terme général est de signe positif pour les termes pairs alors : $\begin{cases} S_{2(n+1)} - S_{2n} = |x_{2n+2}| - |x_{2n+1}| \leqslant 0 \\ S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -|x_{2n+2}| + |x_{2n+1}| \geqslant 0 \end{cases}$

Si le terme général est de signe positif pour les termes pairs alors :...

Par ailleurs, pour tout entier $n \geqslant E\left(\frac{n_0}{2}\right)$, $S_{2n+1} - S_{2n} = x_{2n+1}$ or ..

Ainsi les suites $(S_{2n})_{n \geqslant E\left(\frac{n_0}{2}\right)}$ et $(S_{2n+1})_{n \geqslant E\left(\frac{n_0-1}{2}\right)}$ sont convergentes vers un réel l compris entre les termes S_{2n} et S_{2n+1} .

Les termes des deux suites $(S_{2n})_{n \geqslant E\left(\frac{n_0}{2}\right)}$ et $(S_{2n+1})_{n \geqslant E\left(\frac{n_0-1}{2}\right)}$ décrivant tous les termes de la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$, elle converge elle aussi vers le réel l . □

Remarque : on peut retenir pour l'encadrement du reste d'une série alternée : $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x_k \right| \leqslant |x_{n+1}|$

D'un point de vue algorithmique, l'encadrement du reste permet de définir une condition d'arrêt d'une boucle portant sur la précision désirée pour l'approximation de la somme de la série.

Exemple : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$ ainsi pour obtenir une approximation de $\ln(2)$ à une précision $\varepsilon > 0$ quelconque , il suffit d'effectuer les sommes partielles jusqu'au rang...

2. Séries entières

a) Convergence d'une série entière

Définition d'une série entière d'une variable complexe : soit (a_n) une suite de nombres complexes. La série de terme général $a_n z^n$, notée $\sum a_n z^n$ est appelée série entière de variable complexe z .

Rappel : $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^0 \overset{\text{def}}{=} 1$, ce qui implique en particulier qu'ici $0^0 \overset{\text{def}}{=} 1$.

Remarques : le qualificatif « entière » désigne l'exposant des puissances de z .les sommes partielles de la série $\sum a_n z^n$ dépendent ici de la variable complexe z : $S_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$. Une série entière peut être considérée comme une suite de polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Cependant, la limite de cette suite de polynômes n'est pas un polynôme et la série numérique $\sum a_n z^n$ n'est pas nécessairement convergente pour tout nombre complexe z .

Une série de type $\sum b_n z^{2n}$ par exemple, est appelée série lacunaire car …

Exemples : si pour tout entier naturel n , $a_n = (-1)^n$ alors la série entière $\sum a_n z^n$ est la suite des sommes partielles :

$S_0(z)=\ldots$
$S_1(z)=\ldots$
$S_2(z)=\ldots$
Si $|z|<1$ alors $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^k=\ldots$

Pour une série entière $\sum a_n z^n$ donnée, l'ensemble $I=\left\{r\in\mathbb{R}^+ \,|\, \text{la série } \sum |a_n| r^n \text{ converge}\right\}$ est un intervalle réel (éventuellement réduit à $\{0\}$) car si $r\in I$, alors, par comparaison des séries à termes positifs, l'intervalle $[0;r]$ est inclus dans l'ensemble I.

Définition du rayon de convergence d'une série entière d'une variable complexe : soit $\sum a_n z^n$ une série entière, alors le rayon de convergence de cette série est $R \overset{\text{def}}{=} \sup\left\{r\in\mathbb{R}^+ \,|\, \text{la série } \sum |a_n| r^n \text{ converge}\right\}$.

Remarques : le rayon de convergence est la borne supérieure d'un intervalle donc R peut être un réel ou $+\infty$.

Théorème sur la nature d'une série entière d'une variable complexe : soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de converge.

Pour tout nombre complexe z tel que $|z|<R$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Pour tout nombre complexe z tel que $|z|>R$, la série $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente car la suite $\left(a_n z^n\right)$ n'est pas bornée.

Démonstration :

1) Si $|z|<R$ alors il existe $r\in]|z|;R[$ donc $\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}, |a_n z^n|\leqslant |a_n| r^n \\ \text{la série } \sum |a_n| r^n \text{ est convergente}\end{cases}$

Ainsi, en vertu du critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

2) Si $|z|>R$, supposons par l'absurde que la suite $\left(a_n z^n\right)$ soit bornée. Soit un réel $A>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|a_n z^n|\leqslant A$

Puisque $|z|>R$, il existe $r\in]R;|z|[$ donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $|a_n| r^n=|a_n z^n|\left(\frac{r}{|z|}\right)^n\leqslant A\,q^n$ avec $q=\frac{r}{|z|}<1$

Or $\sum Aq^n$ est une série géométrique convergente, ainsi, en vertu du critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum |a_n| r^n$ est convergente. Donc $r\leqslant R$ ce qui contredit la définition du réel r.

Conclusion : la suite $\left(a_n z^n\right)$ n'est pas bornée donc la série $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente. □

⚠ Pour $|z|=R$ la série $\sum a_n z^n$ peut être absolument convergente, convergente ou divergente.

Méthode : soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ et $z_0\in\mathbb{C}$.

Si la série numérique est absolument convergente alors $R\geqslant|z_0|$

Si la série numérique $\sum a_n (z_0)^n$ est convergente mais pas absolument convergente alors $R=|z_0|$

Si la série numérique $\sum a_n (z_0)^n$ est grossièrement divergente alors $R\leqslant|z_0|$

Définition du disque (ouvert) de convergence : soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence, la boule ouverte de centre 0 et de rayon R est appelée disque (ouvert) de converge de la série entière.

L'application : $\begin{array}{l} B_O(0;R) \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array}$ est appelée fonction somme de la série entière $\sum a_n z^n$.

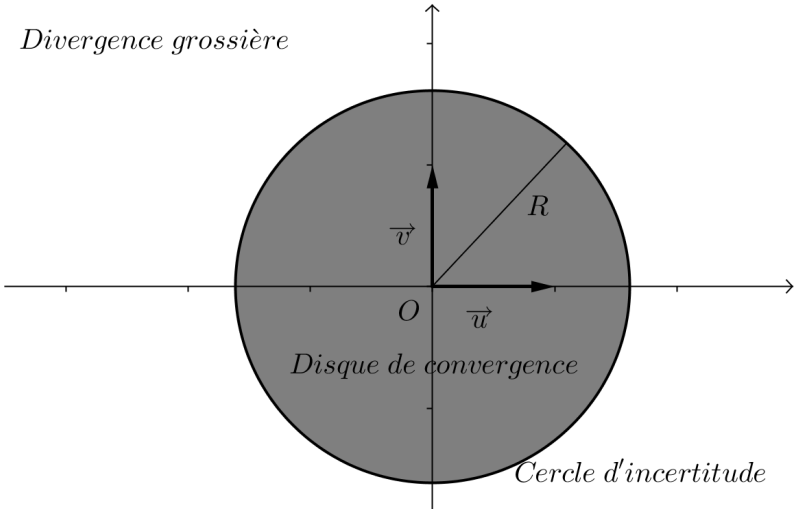
Remarque : si R=0 alors ...

Si $R=+\infty$ alors...

Remarque : le rayon de convergence peut être défini de façon analogue par :

$$R=\sup\left\{r\in\mathbb{R}^+ \,|\, \text{la série } \sum a_n r^n \text{ converge}\right\}$$

L'ensemble de définition de la fonction somme peut être étendu aux points du cercle d'incertitude pour lesquels la série $\sum a_n z^n$ converge.



Application de la règle de d'Alembert à la recherche du rayon de convergence d'une série entière :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n\neq 0$ et R son rayon de convergence.

Soit un réel $r>0$, le théorème de d'Alembert appliqué à la série $\sum |a_n| r^n$ considère le quotient : $\dfrac{|a_{n+1}|r^{n+1}}{|a_n|r^n}=r\times\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

► Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L\neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|a_{n+1}|r^{n+1}}{|a_n|r^n}=r\times L$

Ainsi, $\forall r\in\left]0;\dfrac{1}{L}\right[$, $r\times L<1$ donc, d'après la règle de d'Alembert pour les séries à termes positifs, la série $\sum |a_n| r^n$ converge. Ainsi $\left]0;\dfrac{1}{L}\right[\subset]0;R[$ donc $\dfrac{1}{L}\leqslant R$.

En revanche, $\forall r\in\left]\dfrac{1}{L};+\infty\right[$, $r\times L>1$ donc, d'après la règle de d'Alembert pour les séries à termes positifs, la série $\sum |a_n| r^n$ diverge. Ainsi $\left]\dfrac{1}{L};+\infty\right[\subset]R;+\infty[$ donc $R\leqslant\dfrac{1}{L}$

Conclusion : $R=\dfrac{1}{L}$.

► Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ alors $\forall r>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|a_{n+1}|r^{n+1}}{|a_n|r^n}=r\times 0=0<1$ donc, d'après la règle de d'Alembert pour les séries à termes positifs, la série $\sum |a_n| r^n$ converge. Ce raisonnement étant valide pour tout réel r positif, $R=+\infty$.

► Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=+\infty$ alors $\forall r>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|a_{n+1}|r^{n+1}}{|a_n|r^n}=+\infty$ donc, d'après la règle de d'Alembert pour les séries à termes positifs, la série $\sum |a_n| r^n$ diverge. Ce raisonnement étant valide pour tout réel r positif, on a $R=0$.

Exemple : pour la série $\sum n 2^n z^{2n}$ ...

⚠ Pour les séries lacunaires du type : $\sum b_n z^{pn+q}$ le critère de d'Alembert ne peut s'appliquer car $a_n=0$ pour

$n \notin p\mathbb{N}+q$. Il s'agit donc d'écrire $\sum b_n z^{pn+q} = z^q \sum b_n \left(z^p\right)^n$ et de poser $Z = z^p$ pour appliquer le critère de d'Alembert à la série entière de variable Z, $\sum b_n Z^n$.

Conséquences des critères de convergence des séries à termes positifs : soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b :

- critère d'équivalence : si $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$ alors $R_a = R_b$
- critère de comparaison : si $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant |b_n|$ alors $R_a \geqslant R_b$

Démonstration :
Soit un réel $r > 0$, si $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$ alors $|a_n| r^n \underset{+\infty}{\sim} |b_n| r^n$ donc, en vertu du critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, les séries $\sum |a_n| r^n$ et $\sum |b_n| r^n$ sont de même nature...

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant |b_n|$ alors $|a_n| r^n \leqslant |b_n| r^n$ ainsi, en vertu du critère de comparaison pour les séries à termes positifs, si la série $\sum |b_n| r^n$ converge alors la série $\sum |a_n| z^n$ converge donc :

$$\left\{ r \in \mathbb{R}^+ \,|\, \text{la série } \sum |b_n| r^n \text{ converge} \right\} \subset \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \,|\, \text{la série } \sum |a_n| r^n \text{ converge} \right\}$$

$$\text{Ainsi : } \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \,|\, \text{la série } \sum |b_n| r^n \text{ converge} \right\} \leqslant \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \,|\, \text{la série } \sum |a_n| r^n \text{ converge} \right\}$$

$$\text{Donc : } R_b \leqslant R_a \quad \square$$

Caractérisations du rayon de convergence d'une série à l'aide de son terme général : soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence :

$$R = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \,|\, \lim_{n \to +\infty} a_n r^n = 0 \right\}$$

$$R = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \,|\, \text{la suite } \left(a_n r^n\right) \text{ est bornée} \right\}$$

Démonstration : toute suite convergente étant bornée, et toute série convergente ayant un terme général convergeant vers 0, on a a priori $\sum a_n r^n$ converge $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n r^n = 0 \Rightarrow$ la suite $\left(a_n r^n\right)$ est bornée

$$\text{Donc : } \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \,|\, \text{la série } \sum a_n r^n \text{ converge} \right\} \subset \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \,|\, \lim_{n \to +\infty} a_n r^n = 0 \right\} \subset \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \,|\, \text{la suite } \left(a_n r^n\right) \text{ est bornée} \right\}$$

$$\text{Ainsi : } R \leqslant \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \,|\, \lim_{n \to +\infty} a_n r^n = 0 \right\} \leqslant \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \,|\, \text{la suite } \left(a_n r^n\right) \text{ est bornée} \right\}$$

De plus, le théorème sur la nature d'une série entière permet d'affirmer que :si $r < R$ alors la suite $\left(a_n r^n\right)$ est bornée

$$\text{ainsi } \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^a \,|\, \text{la suite } \left(a_n r^n\right) \text{ est bornée} \right\} \leqslant R$$

Conclusion :$R = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \,|\, \lim_{n \to +\infty} a_n r^n = 0 \right\} = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \,|\, \text{la suite } \left(a_n r^n\right) \text{ est bornée} \right\}$ $\square$

Remarque : s'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $\left(a_n \left(z_0\right)^n\right)$ soit bornée alors $|z_0| \leqslant R$
s'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $\left(a_n \left(z_0\right)^n\right)$ soit non borné alors $R \leqslant |z_0|$

Exemple : soit la série $\sum \frac{\sin(n)}{n} z^n$,...

Méthode : soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ et $z_0 \in \mathbb{C}$.

Si la suite numérique $\left(a_n(z_0)^n\right)_n$ converge vers 0 alors $R \geqslant |z_0|$

Si la suite numérique $\left(a_n(z_0)^n\right)_n$ ne converge pas vers 0 alors $R \geqslant |z_0|$

Opérations sur les séries entières : soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R>0$ et $R'>0$ et un scalaire $\lambda \neq 0$.

Produit par un scalaire : $\sum \lambda a_n z^n$ a pour rayon de convergence R

et si $|z|<R$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

Cas des séries lacunaires : pour $(q;r) \in \mathbb{N}^2$, $\sum a_n z^{qn+r}$ a pour rayon de convergence $R^{\frac{1}{q}}$

et si $|z|<R^{\frac{1}{q}}$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{qn+r} = z^r \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(z^q\right)^n$

Série somme de deux séries entières : $\sum \left(a_n+b_n\right) z^n$ a un rayon de convergence $R_S \geqslant \min(R;R')$

et, si $|z|<\min(R;R')$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n+b_n\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$

Série produit de deux séries entières : $\sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n$ a un rayon de convergence $R_P \geqslant \min(R;R')$

et, si $|z|<\min(R;R')$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$

Démonstration : par passage à la limite sur des sommes partielles.

b) Somme d'une série entière d'une variable réelle

Définition de l'intervalle de convergence : soit $\sum a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle, l'intervalle de convergence est l'ensemble : $\left\{ x \in \mathbb{R} \,|\, \text{la série } \sum a_n x^n \text{ converge} \right\}$.

- Si $R=+\infty$ alors l'intervalle de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est $]-\infty;+\infty[$
- Si R est un réel strictement positif alors l'intervalle de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est un intervalle $]-R;R[$, $]-R;R]$, $[-R;R[$ ou $[-R;R]$ selon la nature des séries $\sum a_n (-R)^n$ et $\sum a_n R^n$.

Propriétés de la fonction somme d'une série entière de variable réelle : soit $\sum a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle de rayon de convergence $R>0$, d'intervalle de convergence I et la fonction somme f définie sur l'intervalle I par : $\forall x \in I, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

- La fonction f est continue sur l'intervalle I.
- La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-R;R[$, sa dérivée est la fonction somme de la série entière $\sum_{n \geqslant 1} n a_n x^{n-1}$ dont le rayon de convergence est R : $\forall x \in]-R;R[, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ « dérivation terme à terme »
- La fonction f admet pour primitive la fonction somme de la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ dont le rayon de

convergence est R : $\forall x\in]-\mathrm{R};\mathrm{R}[,\ \int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ « intégration terme à terme »

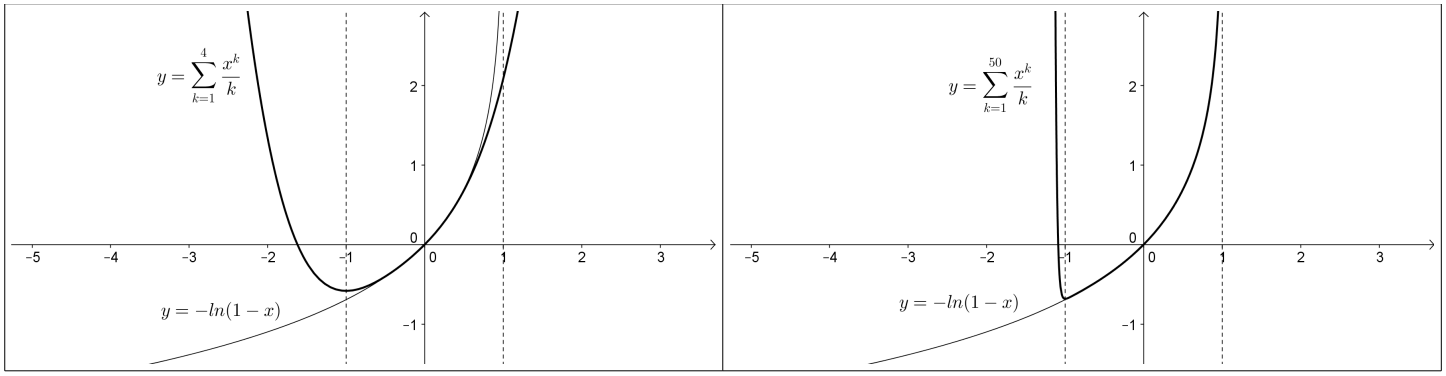
⚠ On n'obtient ici LA primitive s'annulant en 0.

Pour déterminer TOUTES les primitives F de f sur $]-\mathrm{R};\mathrm{R}[$, on utilise : $\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}(0)+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

Propriétés admises.

Exemple : la fonction $f:x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n$ est continue sur l'intervalle $[-1;1[$ (cf critère spécial pour les séries alternées appliqué à $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$) et f est dérivable sur $]-1;1[$: $\forall x\in]-1;1[$, $f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$

Ainsi, $\forall x\in]-1;1[$, $f(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t+f(0)=-\ln(1-x)$



Les fonctions f et $x\mapsto-\ln(1-x)$ sont continues sur $[-1;1[$ donc par passage à la limite quand x tend vers -1 dans l'égalité précédente, on a : $f(-1)=-\ln(2)$ d'où : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln(2)$.

Rappel sur les théorèmes de prolongement au bord d'un intervalle :

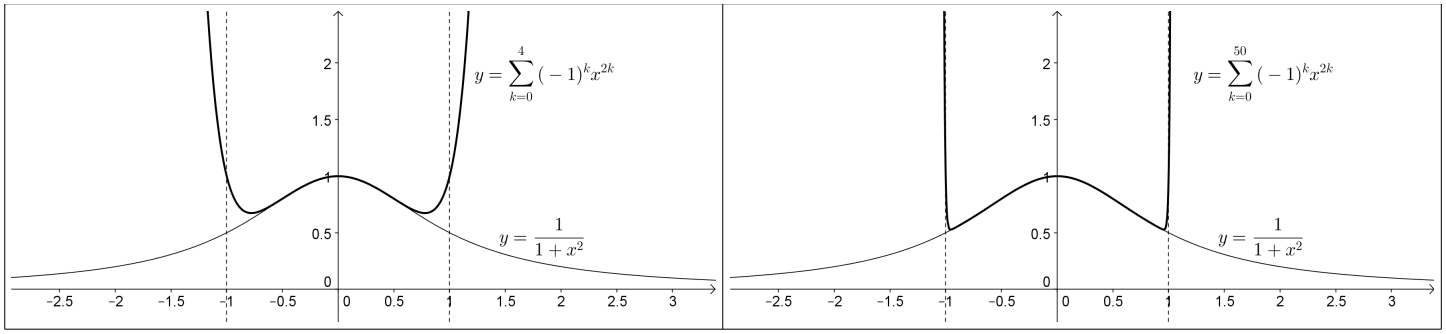
Unicité du prolongement par continuité : $\left.\begin{array}{c}f\text{ et }g\text{ sont continues sur }[a;b]\\ \forall x\in]a;b],\ f(x)=g(x)\end{array}\right\}\Rightarrow\forall x\in[a;b],\ f(x)=g(x)$

Prolongement de la dérivée : $\left.\begin{array}{c}f\text{ est continue sur }[a;b]\\ f\text{ est de classe }\mathrm{C}^1\text{ sur }]a;b]\\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f'(x)\text{existe et est finie}\end{array}\right\}\Rightarrow f\text{ est de classe }\mathrm{C}^1\text{ sur }[a;b]$

⚠ Le prolongement d'une égalité jusqu'au bord de l'intervalle de convergence doit se faire avec précaution !

Exemple : la fonction $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$ est continue sur l'intervalle $]-1;1[$ et $\forall x\in]-1;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$

La fonction $x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais l'égalité n'est pas prolongeable en $x=1$ ou $x=-1$ car la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ n'est pas convergente.



Corollaire sur les dérivées successives de la somme d'une série entière : soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et f sa somme : $\forall x\in]-R;R[,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

En appliquant k fois la propriété de dérivabilité, la fonction f est de classe C^∞ sur l'intervalle $]-R;R[$ et

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in]-R;R[,\ \boxed{f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{(n-k)!}a_n x^{n-k}}$$

et en particulier $\boxed{f^{(k)}(0)=k!\,a_k}$

Démonstration : par récurrence sur k.
Évaluation en 0 en utilisant $0^0\overset{\text{def}}{=}1$ et $\forall n>0,\ 0^n=0$.

Corollaire sur l'unicité du développement en série entière : soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières et I un intervalle ouvert contenant 0.

$$\text{Si } \forall x\in I,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ alors } \forall n\in\mathbb{N},\ a_n=b_n$$

$$\text{Si } \forall x\in I,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=0 \text{ alors } \forall n\in\mathbb{N},\ a_n=0$$

Démonstration : en considérant l'égalité des deux fonction sommes, les dérivées successives en 0 sont égales.
La linéarité de l'application qui à une série entière associe sa fonction somme assure l'équivalence des deux formulations.

Définition des fonctions développables en série entière autour de zéro : soit f une fonction définie sur un intervalle réel I et à valeurs dans $\mathbb{C}$. La fonction f est développable en série entière autour de 0 si et seulement s'il existe : une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R et un intervalle I' contenant 0 tels que : $\begin{cases} I'\subset I \\ \forall x\in I',\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{cases}$

Méthode : recherche des solutions développables en séries entières d'une équation différentielle (E) linéaire à coefficients polynomiaux.

Soit $R>0$ et $\forall t\in]-R,R[,\ f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

1) Injecter f dans l'équation différentielle : f est solution de (E) sur $]-R;R[$ $\Leftrightarrow$ …
2) Modifier les indices des sommes pour avoir t^n dans chacune
3) Isoler les termes qui ne sont pas présents dans toutes les sommes, puis la linéarité pour avoir une seule somme
4) Utiliser l'unicité du développement en série entière pour identifier les coefficients a_n
5) Calculer R et déterminer f à l'aide des fonctions de référence.

Développements en séries entières à connaître :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{ch}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{sh}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

$$\forall x\in]-1;1[,\ \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n \text{ i.e. } \forall x\in]-1;1[,\ \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$$

$$\forall x\in]-1;1],\ \ln(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} \text{ i.e. } \forall x\in[-1;1[,\ -\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$$

Soit $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$,

$$\forall x\in]-1;1[,\ (1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n$$

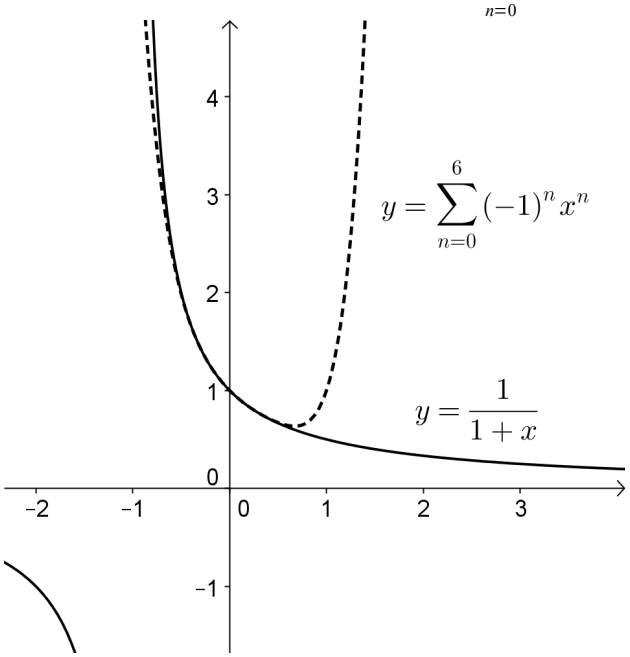
$\forall x\in\mathbb{R},\ \sin(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$	

Démonstrations :

► Pour $x\mapsto\frac{1}{1+x}$, on utilise la somme d'une série géométrique: $\sum_{n=0}^{k}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{k}(-x)^n=\frac{1-(-x)^{k+1}}{1-(-x)}=\frac{1-(-x)^{k+1}}{1+x}$

Ainsi, si $|-x|<-1$, $\lim\limits_{k\to+\infty}(-x)^{k+1}=0$ d'où : $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}$.

⚠ La fonction $x\mapsto\frac{1}{1+x}$ est continue en 1 mais la fonction somme $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ n'est pas continue en 1.



► Pour $x\mapsto\ln(1+x)$, il suffit d'utiliser la primitive de $x\mapsto\frac{1}{1+x}$ s'annulant en 0.

Ainsi : $\forall x\in]-1;1[,\ \ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$.

De plus, pour $x=1$, $\sum\frac{(-1)^n}{n+1}$ est une série alternée pour laquelle le critère spécial de convergence des séries alternées peut s'appliquer donc la série $\sum\frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente.

Ainsi, les fonctions $x\mapsto\ln(1+x)$ et $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ sont continues sur l'intervalle $]-1;1]$, ainsi :

$$\forall x\in]-1;1],\ \ln(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}-\frac{(1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

► Pour $x\mapsto e^x$, $x\mapsto\cos(x)$, $x\mapsto\sin(x)$, il suffit d'utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange :
Soit I un intervalle réel, f une fonction de classe $C^{k+1}(I;\mathbb{R})$ et deux réels $a\in I$ et $b\in I$:

$$\left|f(b)-\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n\right|\leqslant\frac{|b-a|^{k+1}}{(k+1)!}\sup_{t\in[a;b]}|f^{(k+1)}(t)|$$

La fonction exponentielle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ \exp^{(n)}(x)=\exp(x)$.
De plus la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\begin{cases}x>0\Rightarrow\sup\limits_{t\in[0;x]}|\exp(t)|=\exp(x)\\ x<0\Rightarrow\sup\limits_{t\in[x;0]}|\exp(t)|=\exp(0)=1\end{cases}$

$$\text{Donc : }\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ \left|e^x-\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!}x^n\right|\leqslant\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}\max(1;e^x)$$

La série entière $\sum\frac{1}{n!}x^n$ a pour rayon de convergence $R=+\infty$ (règle de d'Alembert), ainsi $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}=0$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{k\to+\infty}\left|e^x-\sum\limits_{n=0}^{k}\frac{1}{n!}x^n\right|=0$ donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$

La fonction cosinus étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ donc $\cos^{(n)}(0)=\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

De plus $\forall x\in\mathbb{R}$, $|\cos(x)|\leqslant 1$ donc : $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\left|\cos(x)-\sum\limits_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\right|\leqslant\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}\times 1$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}=0$, donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{k\to+\infty}\left|\cos(x)-\sum\limits_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\right|=0$ ainsi, $\cos(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$

La démarche est analogue pour la fonction sinus, en sachant que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sin^{(n)}(0)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

► Pour $x\mapsto\mathrm{ch}(x)$ et $y\mapsto\mathrm{sh}(x)$ il suffit de former respectivement les séries sommes et différences $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

► Pour $x\mapsto(1+x)^\alpha$.

La fonction $f_\alpha:x\mapsto(1+x)^\alpha$ est de classe C^∞ sur $]-1;+\infty[$ car pour tout réel $x>-1$, $1+x>0$ donc $(1+x)^\alpha=e^{\alpha\ln(1+x)}$

De plus $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(f_\alpha)^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$ donc $(f_\alpha)^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))$

Si $n>\alpha$ alors la fonction $x\to(1+x)^{\alpha-n}$ est décroissante sur $]-1;+\infty[$ donc : $\begin{cases}x>0\Rightarrow\sup\limits_{t\in[0;x]}\left|(1+x)^{\alpha-n}\right|=(1+0)^{\alpha-n}=1\\-1<x<0\Rightarrow\sup\limits_{t\in[x;0]}\left|(1+x)^{\alpha-n}\right|=(1+x)^{\alpha-n}\end{cases}$

Pour tout entier $k>\alpha$, $\forall x\in]0;+\infty[$, $\left|(1+x)^\alpha-\left(1+\sum\limits_{n=1}^{k}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n\right)\right|\leqslant\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)|\times 1$

Or $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(\alpha-n)}{(n+1)!}}{\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}}=\left(\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(\alpha-n)}{(n+1)!}\right)\times\left(\frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}\right)=\frac{\alpha-n}{n+1}$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=1$ donc la série entière $\sum\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n$ a pour rayon de convergence $R=1$

Ainsi, $\forall x\in]0;1[$, $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)|=0$ donc $\forall x\in[0;1[$, $(1+x)^\alpha=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n$

Remarque : si $\alpha<-1$ alors cette égalité peut être prolongée en $x=1$ en appliquant le critère spécial des séries alternées à la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}$ qui est alternée à partir du rang $n_0=E(\alpha)$.

Pour tout $k>\alpha$, $\forall x\in]-1;0[$, $\left|(1+x)^\alpha-\left(1+\sum\limits_{n=0}^{k}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n\right)\right|\leqslant\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)|\times(1+x)^{\alpha-(k+1)}$

$$\left|(1+x)^\alpha-\left(1+\sum_{n=0}^{k}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n\right)\right|\leqslant\left|\frac{x}{x+1}\right|^{k+1}\times\frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)|}{(k+1)!}\times(1+x)^\alpha$$

Si $-1<x<-\frac{1}{2}$ alors $2x<-1$ d'où $x<-x-1$ ainsi $\frac{x}{x+1}<-1$ (car $x+1>0$) d'où : $\lim\limits_{k\to+\infty}\left|\frac{x}{x+1}\right|^{k+1}=+\infty$

Ici cette inégalité n'est pas suffisamment précise pour assurer la convergence désirée. L'égalité de Taylor-Lagrange avec reste intégrale permet davantage de précision sous les même hypothèses que l'inégalité :

$$f(b)-\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n=\int_a^b\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(b-t)^k\,dt$$

$$\forall x\in]-1;0],(1+x)^\alpha-\left(1+\sum_{n=0}^{k}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n\right)=\int_0^x\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)(1+t)^{\alpha-(k+1)}}{k!}(x-t)^k\,dt$$

$$\forall x\in]-1;0],(1+x)^\alpha-\left(1+\sum_{n=0}^{k}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n\right)=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)}{k!}\int_0^x(1+t)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^k dt$$

Ici, on a : $-1<x\leqslant t\leqslant 0$ donc $\begin{cases}x-t\leqslant 0\\0<1+t\end{cases}$ donc le signe de $\int_0^x(1+t)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^k dt$ dépend de la parité de l'entier k.

$$\left|\int_0^x (1+t)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^k \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^0 (1+t)^{\alpha-1}\left|\frac{x-t}{1+t}\right|^k \mathrm{d}t$$

Or, pour $-1<x\leqslant t\leqslant 0$, $\left|\frac{x-t}{1+t}\right| = \frac{t-x}{1+t}$ or $-t>xt$ donc $t<-xt$ ainsi $t-x<-x-xt=-x(1+t)$ donc $\frac{t-x}{1+t}<-x$ d'où :

$$\left|\int_0^x (1+t)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^k \mathrm{d}t\right| \leqslant (-x)^k \int_x^0 (1+t)^{\alpha-1}\mathrm{d}t = (-x)^k\left[\frac{(1+t)^\alpha}{\alpha}\right]_x^0 = (-x)^k\left(1-\frac{(1+x)^\alpha}{\alpha}\right)$$

$$\forall x\in]-1;0],\left|(1+x)^\alpha - \left(1+\sum_{n=0}^{k}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n\right)\right| \leqslant \frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)|}{k!}(-x)^k\left(1-\frac{(1+x)^\alpha}{\alpha}\right)$$

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)}{k!}$ a pour rayon de convergence $R=1$

donc $\forall x\in]-1;0]$, $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)|}{k!}(-x)^k=0$ donc $\forall x\in]-1;0]$, $(1+x)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n$.□

Remarque : ces résultats peuvent aussi être démontrés à l'aide d'équations différentielles vérifiées par les séries entières :

$\begin{cases} y'=y \\ y(0)=1 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$; $\begin{cases} y''=y \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$; $\begin{cases} y''=y \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$; $\begin{cases} (1+x)y'=\alpha y \\ y(0)=1 \end{cases}$ sur $]-1;+\infty[$

Recherche de l'expression de la fonction somme d'une série entière du type $\sum \mathrm{P}(n)x^n$

Soit $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$ et la série entière $\sum \mathrm{P}(n)x^n$

Le rayon de convergence de cette série entière est égal 1 (cf critère d'équivalence puis règle de d'Alembert).
Le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X})$ peut se décomposer dans la base $\mathrm{B}=(1;\mathrm{X};\mathrm{X}(\mathrm{X}-1);\ldots;\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\ldots(\mathrm{X}-(k-1)))$ de $\mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$:
$\mathrm{P}(\mathrm{X})=a_0+a_1\mathrm{X}+a_2\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)+\ldots+a_k\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\ldots(\mathrm{X}-(k-1))$
Toutes les sommes manipulées étant convergentes pour $x\in]-1;1[$ on a, par linéarité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(n)x^n = a_0\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)+a_1x\left(\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}\right)+\ldots a_kx^k\left(\sum_{n=k}^{+\infty}n(n-1)\ldots((n-(k-1))x)^{n-k}\right)$$

La fonction somme $\mathrm{S}:x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(n)x^n$ est définie sur $]-1;1[$ et s'exprime à l'aide des dérivées successives de la somme de la série géométrique :

$$\forall x\in]-1;1[,\ \mathrm{S}(x)=a_0\times\frac{1}{1-x}+a_1x\left(\frac{1}{1-x}\right)'+\ldots+a_kx^k\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)}$$

Exemple : pour $\sum_{n\geqslant 0}n^2x^n$ …

Méthodes (non-exhaustives) permettant d'exprimer la somme d'une série entière à l'aide des fonctions de référence :

1) Le terme général contient-il une factorielle ?
2) Des dérivées ou primitives du terme général sont-elles proches du terme général d'une série de référence ?
3) Pour les séries lacunaires penser à $\sum a_nx^{nq+r}=x^r\sum a_n\left(x^q\right)^n$
4) Pour rendre une série lacunaire : si $x\geqslant 0$ alors $x^n=\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{qn}$, si $x<0$ alors $x^n=(-1)^n\left((-x)^{\frac{1}{q}}\right)^{qn}$
5) Pour n'utiliser que les termes impairs : $\sum a_{2n+1}x^{2n+1}=\sum a_nx^n-\sum a_{2n}x^{2n}$
6) Éventuellement, ajouter ou soustraire les premiers termes pour retrouver une série de référence.

Théorème sur les séries de Taylor : soit f une fonction développable en série entière au voisinage de 0 alors f est de classe C^∞ au voisinage de 0 et son développement en série entière est unique et donné par : $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Démonstration : soit $]-a;a[$ tel que $\forall x\in]-a;a[$, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ alors :

$f(0)=a_0$

$f'(0)=\sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n 0^{n-1}=a_1$

$\vdots$

$f^{(k)}(0)=\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\ldots(n-(k-1))\,a_n 0^{n-k}=k\times(k-1)\ldots2\times1\times a_k=k!\times a_k$ □

⚠ La réciproque est fausse : une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0 n'est pas nécessairement développable en série entière au voisinage de 0.

Exemple : la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x\neq 0 \end{cases}$

Corollaire sur la parité : soit f une fonction développable en série entière au voisinage de 0 en $\sum a_n x^n$:

si la fonction f est paire alors $\forall k\in\mathbb{N}$, $a_{2k+1}=0$
si la fonction f est impaire alors $\forall k\in\mathbb{N}$, $a_{2k}=0$

Démonstration : soit f une fonction définie et développable en série entière sur un intervalle $]-a;a[$.
Si f est paire alors $\forall x\in]-a;a[$, $f(-x)=f(x)$ or f est de classe C^∞ sur $]-a;a[$ donc :
$\forall x\in]-a;a[$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $(-1)^k f^{(k)}(-x)=f^{(k)}(x)$ en particulier $-f^{(2k+1)}(-x)=f^{(2k+1)}(x)$ donc …

c) Exponentielle complexe

Définition de l'exponentielle complexe :

$\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2\ e^{x+iy}\overset{\text{def}}{=}e^x(\cos(y)+i\sin(y))$

Remarque : $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2$ on a : $e^{x+iy}=e^x\times e^{iy}$
Donc $e^{x+i0}=e^x$ et $e^{0+iy}=e^{iy}$

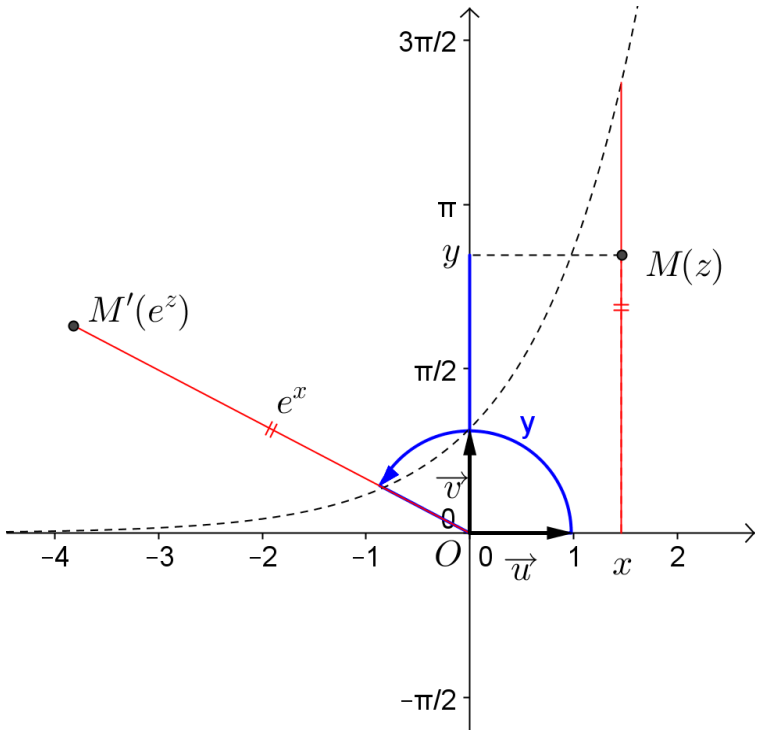
Propriétés de l'exponentielle complexe :

$\begin{cases}\text{Re}(e^z)=\ldots \\ \text{Im}(e^z)=\ldots\end{cases}$

$\begin{cases}|e^z|=\ldots \\ \arg(e^z)=\ldots\end{cases}$

$e^{z+z'}=\ldots$

$\overline{e^z}=\ldots$



Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ alors : $t\mapsto e^{f(t)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$(e^{f(t)})'=f'(t)e^{f(t)}$

Démonstration : soit $a(t)=\text{Re}(f(t))$ et $b(t)=\text{Im}(f(t))$
$(e^{a(t)})'=a'(t)e^{a(t)}$
et $(e^{ib(t)})'=(\cos(b(t))+i\sin(b(t)))'=-b'(t)\sin(b(t))+ib'(t)\cos(b(t))=ib'(t)(\cos(b(t))+i\sin(b'(t)))=ib'(t)e^{ib(t)}$
Donc $(e^{a(t)+ib(t)})'=(e^{a(t)}\times e^{ib(t)})'=a'(t)e^{a(t)}\times e^{ib(t)}+e^{a(t)}\times ib'(t)e^{ib(t)}=(a'(t)+ib'(t))e^{a(t)+ib(t)}$ □

Théorème : développement en série entière de l'exponentielle complexe : $\forall z\in\mathbb{C}, e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n$

Démonstration :

soit $y\in\mathbb{R}$, $\cos(y)+i\sin(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n}+i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}y^{2n+1}$

or $(iy)^{2n}=(i^2)^n y^{2n}=(-1)^n y^{2n}$ et $(iy)^{2n+1}=i(i^2)^n(y)^{2n+1}$

$\cos(y)+i\sin(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}(iy)^{2n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(iy)^{2n+1}$

Donc : $\cos(y)+i\sin(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(iy)^n$

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$, $e^x(\cos(y)+i\sin(y))=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(iy)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k\times\frac{1}{(n-k)!}(iy)^{n-k}\right)$

Donc $e^x(\cos(y)+i\sin(y))=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(iy)^{n-k}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(x+iy)^n$ □

Exemple : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\times(1+i)^n=...$

3. Séries de Fourier

a) Définitions

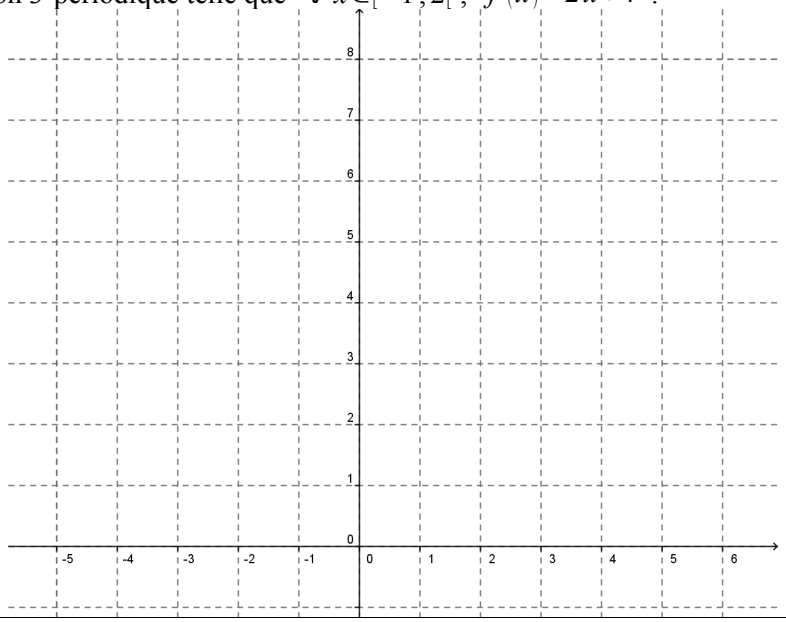
Définition des fonctions T_périodiques : soit T un réel strictement positif et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction f est T-périodique si et seulement si $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+\mathrm{T})=f(x)$.

Remarque : si f est T-périodique alors $\forall k\in\mathbb{Z}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x+k\times\mathrm{T})=f(x)$.
Si f est T-périodique alors f est totalement déterminée par sa restriction à un intervalle de longueur T.

Définition des fonctions T_périodiques continues par morceaux : soit f une fonction T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction f est continue par morceaux si et seulement s'il existe $n+1$ réels $(a_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ tels que :

1) $0=a_0<a_1<\ldots<a_{n-1}<a_n=\mathrm{T}$ (subdivision de l'intervalle $[0;\mathrm{T}]$)
2) $\forall k\in[\![0;n-1]\!]$, la fonction f est continue sur l'intervalle ouvert $]a_k;a_{k+1}[$
3) $\forall k\in[\![0;n-1]\!]$, la fonction f est prolongeable par continuité sur l'intervalle fermé $[a_k;a_{k+1}]$

Exemple : soit f la fonction 3-périodique telle que $\forall x\in[-1;2[$, $f(x)=2x+4$:



Intégrale d'une fonction T-périodique sur un intervalle de longueur T : soit f une fonction T-périodique continue par morceaux $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\int_{\alpha}^{\alpha+\mathrm{T}}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{\mathrm{T}}f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration : par changement de variable ...

Remarque : pour des questions d'éventuelle parité de la fonction f on utilise souvent $\int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}}f(t)\,\mathrm{d}t$.

Définition : l'ensemble des fonctions définies et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et T-périodiques est noté $C_{\mathrm{T}}(\mathbb{R})$.

Propriété : soit α un réel et l'application
$$C_{\mathrm{T}}(\mathbb{R})\times C_{\mathrm{T}}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$$
$$\langle f\,|\,g\rangle\mapsto\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{\alpha}^{\alpha+\mathrm{T}}f(t)\times g(t)\,\mathrm{d}t$$
Alors $\left(C_{\mathrm{T}}(\mathbb{R});\langle\ldots;\ldots\rangle\right)$ est un espace préhilbertien réel.

Démonstration : $C_{\mathrm{T}}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R})$ car...

L'application $\langle f\,|\,g\rangle\mapsto\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{\alpha}^{\alpha+\mathrm{T}}f(t)\times g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $C_{\mathrm{T}}(\mathbb{R})$ car...

□

Remarque : la norme associée à ce produit scalaire est $\|f\|_2 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{T}}\sqrt{\int_\alpha^{\alpha+T}(f(t))^2\,dt}$ on parle alors de moyenne quadratique sur une période.

⚠ L'application $\langle f\,|\,g\rangle \mapsto \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\times g(t)\,dt$ n'est pas un produit scalaire sur le sous-espace vectoriel des fonctions T-périodiques continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ car l'application est alors dégénérée (pas définie positive)
Exemple : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=E(x)+E(-x)-1$.

Propriété : soit $\omega=\frac{2\pi}{T}$ alors la famille $\left((x\mapsto 1);(x\mapsto\sqrt{2}\times\cos(n\omega x))_{n\in\mathbb{N}^*};(x\mapsto\sqrt{2}\times\sin(n\omega x))_{n\in\mathbb{N}^*}\right)$ est orthonormale dans l'espace préhilbertien réel $\left(C_T(\mathbb{R});\langle\ldots;\ldots\rangle\right)$.

Démonstration : soit deux entiers naturels n et m :

$\frac{1}{T}\int_0^T \cos(n\omega t)\times\cos(m\omega t)\,dt=\ldots$

$\frac{1}{T}\int_0^T \cos(n\omega t)\times\sin(m\omega t)\,dt=\ldots$

$\frac{1}{T}\int_0^T \sin(n\omega t)\times\sin(m\omega t)\,dt=\ldots$

Remarques : chaque fonction $x\mapsto\cos(n\omega x)$ et $x\mapsto\sin(n\omega x)$ est $\frac{T}{n}$-périodique.

Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $E_n=vect\left((x\mapsto\cos(k\omega x))_{k\in[0;n]};(x\mapsto\sin(k\omega x))_{k\in[1;n]}\right)$.
La projection orthogonale p_n sur le sous espace vectoriel E_n est définie par : $\forall f\in C_T(\mathbb{R})$,

$$p_n(f)(x)=\langle f|1\rangle 1+\sum_{k=1}^{n}\langle f|\sqrt{2}\cos(n\omega\cdot)\rangle\sqrt{2}\cos(n\omega x)+\sum_{k=1}^{n}\langle f|\sqrt{2}\sin(n\omega\cdot)\rangle\sqrt{2}\sin(n\omega x)$$

$$p_n(f)(x)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\times\sqrt{2}\cos(n\omega t)\,dt\right)\sqrt{2}\cos(n\omega x)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\times\sqrt{2}\sin(n\omega t)\,dt\right)\sqrt{2}\sin(n\omega x)$$

$$p_n(f)(x)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\times\cos(n\omega t)\,dt\right)\cos(n\omega x)+\left(\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\times\sin(n\omega t)\,dt\right)\sin(n\omega x)\right)$$

Définition des coefficients de Fourier : soit f une fonction T-périodique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et continue par morceaux et $\alpha\in\mathbb{R}$. En notant $\omega=\frac{2\pi}{T}$, les coefficients de Fourier de f sont les réels $(a_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k(f))_{k\in\mathbb{N}^*}$ tels que :

$$a_0(f)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\,dt$$

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ a_k(f)\overset{\text{def}}{=}\frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\times\cos(k\omega t)\,dt$$

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ b_k(f)\overset{\text{def}}{=}\frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\times\sin(k\omega t)\,dt$$

Exemples : Soit f une fonction constante (donc T-périodique pour tout réel T) alors :...

Soit f la fonction T périodique telle que $\forall x\in[0;T]$, $f(x)=x$ alors...

Remarques : avec ces notations, pour $f\in C_T(\mathbb{R})$, on a: $\forall x\in\mathbb{R}$, $p_n(f)(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(k\omega x)+b_k\sin(k\omega x)\right)$

Deux résultats utiles : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \int_\alpha^{\alpha+T}\cos(n\omega t)\,dt=0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ \int_\alpha^{\alpha+T}\sin(n\omega t)\,dt=0$

Dans certains cas, on peut simplifier les calculs en définissant pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$c_0(f)\overset{\text{def}}{=}a_0(f)$$

$$c_k(f)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}\left(a_k(f)-i\,b_k(f)\right)=\frac{2}{\mathrm{T}}\int_{\alpha}^{\alpha+\mathrm{T}} f(t)\times \mathrm{e}^{-ik\omega t}\,\mathrm{d}t$$
$$c_{-k}(f)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}\left(a_k(f)+i\,b_k(f)\right)=\frac{2}{\mathrm{T}}\int_{\alpha}^{\alpha+\mathrm{T}} f(t)\times \mathrm{e}^{ik\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Étude de la parité des fonctions T-périodiques : soit f une fonction T-périodique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Si $\forall t\in\left[0;\frac{\mathrm{T}}{2}\right]$, $f(-t)=f(t)$ alors la fonction f est paire.

Si $\forall t\in\left[0;\frac{\mathrm{T}}{2}\right]$, $f(-t)=-f(t)$ alors la fonction f est impaire.

Propriété concernant la parité : soit f une fonction T-périodique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et continue par morceaux admettant pour coefficients de Fourier les réels $\left(a_k(f)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(b_k(f)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Si la fonction f est paire alors :

$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ a_k=\frac{4}{\mathrm{T}}\int_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}} f(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t$

$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ b_k=0$

Si la fonction f est impaire alors :

$\forall k\in\mathbb{N},\ a_k=0$

$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ b_k=\frac{4}{\mathrm{T}}\int_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}} f(t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t$

Démonstration : Si f est paire et T-périodique alors : $a_0(f)=\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t=\ldots$

$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ a_k(f)=\frac{2}{\mathrm{T}}\int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} f(t)\times\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t=\ldots$

$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ b_k(f)=\frac{2}{\mathrm{T}}\int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} f(t)\times\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t=\ldots$

Définition des sommes partielles de la série de Fourier : soit f une fonction T-périodique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et continue par morceaux, $\omega=\frac{2\pi}{\mathrm{T}}$ et les coefficients de Fourier de f, $\left(a_k(f)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(b_k(f)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$. La somme partielle d'ordre $n\in\mathbb{N}$ de la série de Fourier de f est la fonction $\mathrm{S}_n(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{S}_n(f)(x)\overset{\text{def}}{=}a_0(f)+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k(f)\times\cos(k\omega x)+b_k(f)\times\sin(k\omega x)\right)$$

La série de Fourier de la fonction f est la suite des sommes partielles $\left(\mathrm{S}_n(f)\right)$.

Si pour un réel x donné, la série numérique $\left(\mathrm{S}_n(f)(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors sa somme est notée $\mathrm{S}(f)(x)$:

$$\mathrm{S}(f)(x)=a_0(f)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)\times\cos(n\omega x)+b_n(f)\sin(n\omega x)\right)$$

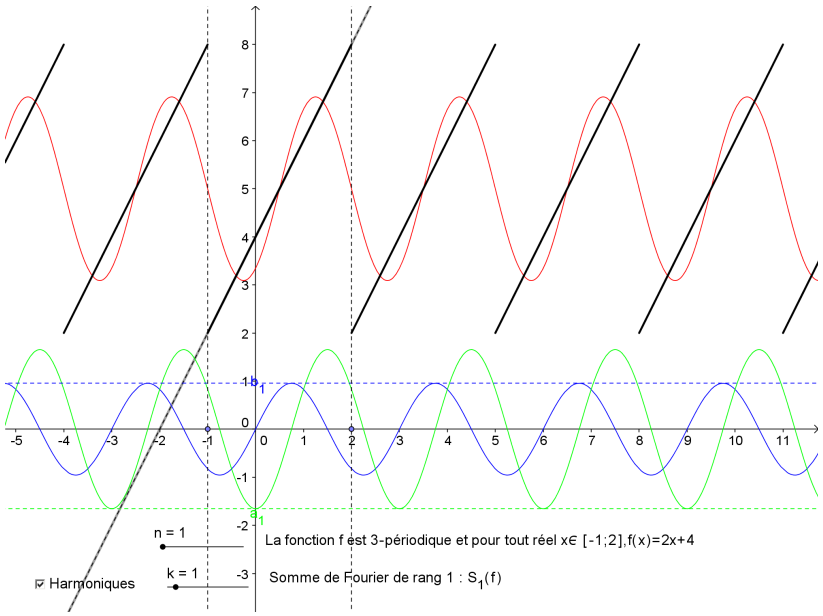
Remarques : on retrouve ici l'expression du projeté orthogonal sur le sous espace vectoriel E_n mais cette définition s'applique non seulement au fonctions $\mathrm{C}_{\mathrm{T}}(\mathbb{R})$ mais aussi aux fonctions continues par morceaux et T-périodiques.

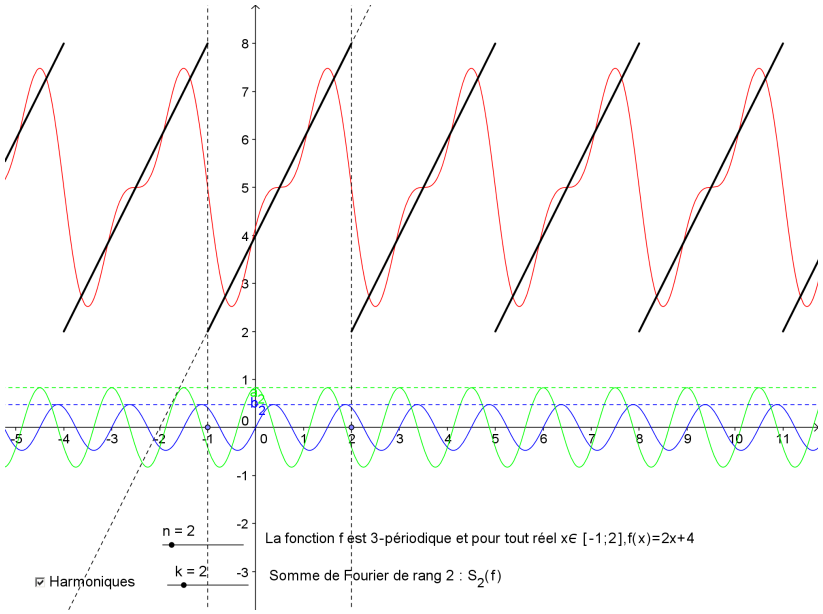
Pour $k\in\mathbb{N}^*$, chaque fonction $x\mapsto a_k(f)\cos(k\omega x)+b_k(f)\sin(k\omega x)$ est $\frac{\mathrm{T}}{k}$-périodique et est appelée harmonique de rang k.

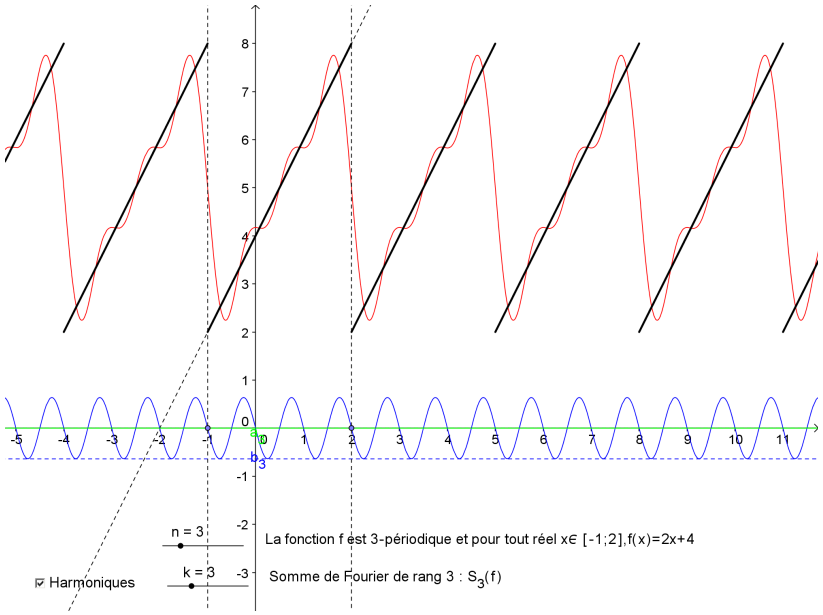
En utilisant l'écriture du nombre complexe $a_k(f)+i\,b_k(f)$ sous forme exponentielle complexe : $a_k(f)+i\,b_k(f)=\rho_k\,\mathrm{e}^{i\theta_k}$

On peut factoriser chaque harmonique à l'aide de la relation :

$$a_k(f)\cos(k\omega x)+b_k(f)\sin(k\omega x)=\mathrm{Re}\left(\rho_k\,\mathrm{e}^{-i\theta_k}\mathrm{e}^{ik\omega x}\right)=\rho_k\cos\left(k\omega x-\theta_k\right)$$







Les représentations graphiques des sommes partielles de la série de Fourier de f semblent s'approcher, quand n tend vers $+\infty$, de la courbe représentative de la fonction f. On distingue deux convergences possibles : convergence en moyenne quadratique ou convergence ponctuelle.

Propriété de linéarité : soit un réel λ, f et g deux fonctions T-périodiques définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et continues par morceaux.
Si la série numérique $S(f)(x)$ est convergente alors la série numérique $S(\lambda f)(x)$ est convergente et

$$S(\lambda f)(x)=\lambda S(f)(x)$$

Si les séries numériques $S(f)(x)$ et $S(g)(x)$ sont convergentes alors la série numérique $S(f+g)(x)$ est convergente et

$$S(f+g)(x)=S(f)(x)+S(g)(x)$$

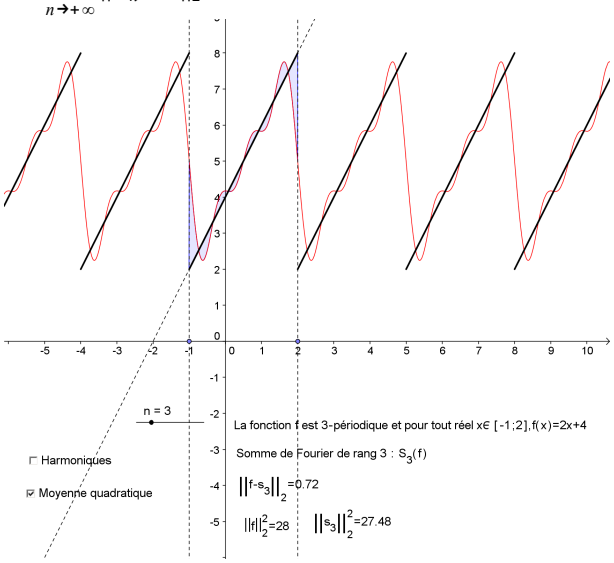
Démonstration : $\forall k\in\mathbb{N}$, $a_k(\lambda f)=\ldots$
et $a_k(f+g)=\ldots$
$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $b_k(\lambda f)=\ldots$
$b_k(f+g)=\ldots$
De plus la série somme de deux séries convergentes est convergente.

b) Formule de Parseval.

Dans l'espace préhilbertien $C_T(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f|g\rangle=\frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\times g(t)\,dt$, on admet que la série de Fourier de f converge en moyenne quadratique vers la fonction f : $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f-S_n(f)\|_2=0$

Or l'inégalité triangulaire donne : $\big|\|f\|_2-\|S_n(f)\|_2\big|\leqslant\|f-S_n(f)\|_2$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\|S_n(f)\|_2=\|f\|_2$.



$$\forall x\in\mathbb{R},\ S_n(f)(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(k\omega x)+b_k\sin(k\omega x)\right)$$

Alors, le théorème de Pythagore donne : $\left(\|S_n(f)\|_2\right)^2=(a_0)^2\times 1+\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2\frac{1}{2}+(b_k)^2\frac{1}{2}$

Car la famille $\left((x\mapsto 1);(x\mapsto\cos(n\omega x))_{n\in\mathbb{N}^*};(x\mapsto\sin(n\omega x))_{n\in\mathbb{N}^*}\right)$ est orthogonale et : $\left(\|1\|_2\right)^2=\ldots$
et pour $k\neq 0$, $\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2(k\omega t)\,dt=\ldots$
$\frac{1}{T}\int_0^T\sin^2(k\omega t)\,dt=\ldots$

Cette égalité envisagée dans l'espace préhibertien $C_T(\mathbb{R})$ s'étend aux fonctions continues par morceaux grâce au théorème suivant.

Théorème de Parseval (conséquence de la convergence en moyenne quadratique) : Soit f une fonction T périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $\alpha\in\mathbb{R}$ et ses coefficients de Fourier, $(a_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k(f))_{k\in\mathbb{N}^*}$.
Si f est continue par morceaux alors :

les séries numériques $\sum_{n\geqslant 1}|a_n(f)|^2$ et $\sum_{n\geqslant 1}|b_n(f)|^2$ sont convergentes et,

$$\frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T}|f(t)|^2\,dt=|a_0(f)|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2$$

Théorème admis.

Exemple :

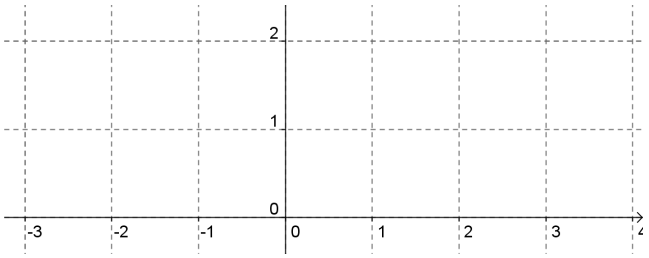
c) Convergence d'une série de Fourier.

Définition des fonctions T-périodiques de classe C^1 par morceaux : soit f une fonction T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
La fonction f est de classe C^1 par morceaux si et seulement s'il existe $n+1$ réels $(a_k)_{k\in[0;n]}$ tels que :

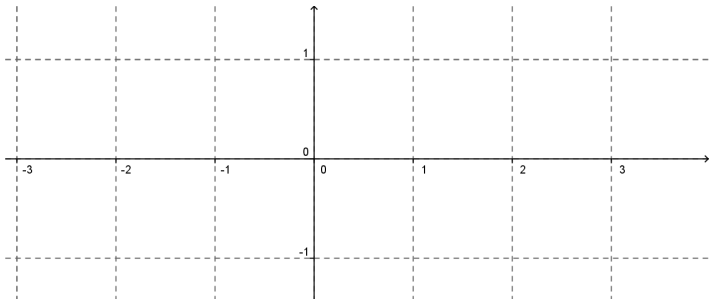
1) $0=a_0<a_1<\ldots<a_{n-1}<a_n=T$ (subdivision de l'intervalle $[0;T]$)
2) $\forall k\in[0;n-1]$, la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle ouvert $]a_k;a_{k+1}[$
3) $\forall k\in[0;n-1]$, la fonction f est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur l'intervalle fermé $[a_k;a_{k+1}]$

Exemple et contre-exemple :

Soit f la fonction 3-périodique telle que : $\forall x\in[-1;2[$, $f(x)=|x|$ alors la fonction f est ...



Soit g la fonction 2-périodique impaire telle que : $\forall x\in[0;1[, g(x)=\sqrt{x}$ et $g(1)=0$ alors la fonction g …



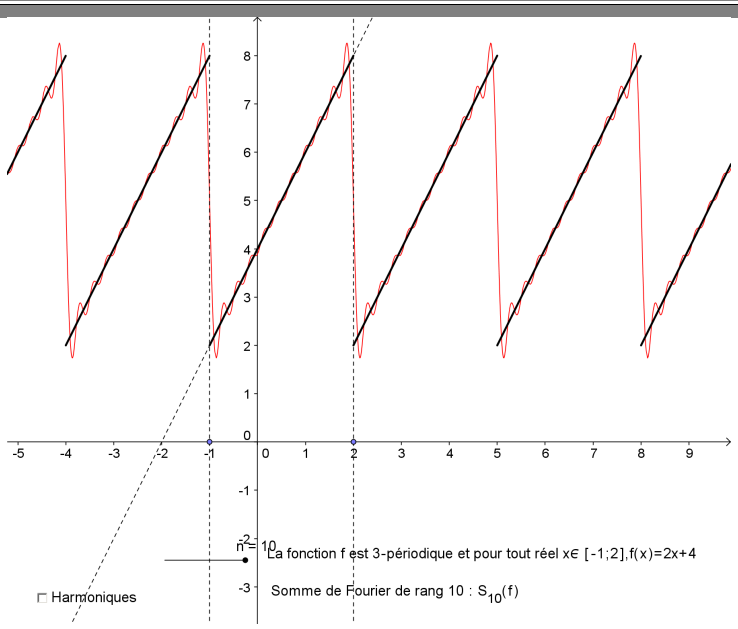
Définition de la demi-somme des limites à gauche et à droite : soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, pour tout réel x, la demi-somme des limites de f à gauche et à droite du réel t est le nombre noté $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ défini par :

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\underset{\text{def}}{=}\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}$$

Remarque : si la fonction f est continue en un réel t alors $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=f(x)$

Théorème de Dirichlet (convergence ponctuelle) : soit f une fonction T-périodique définie sur $\mathbb{R}$.
Si f est de classe C^1 par morceaux alors pour tout réel t, la série numérique $S(f)(x)$ converge vers la demi-somme des limites de f à gauche et à droite du réel x.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ a_0(f)+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(f)\times\cos(n\omega x)+b_n(f)\times\sin(n\omega x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

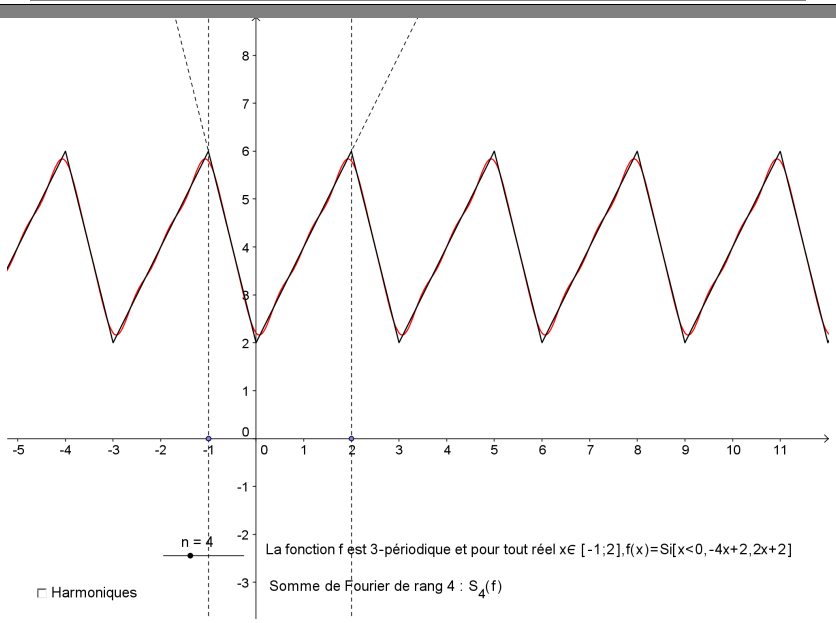


Corollaire pour les fonctions continues : soit f une fonction T-périodique Définie sur $\mathbb{R}$.
Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux, alors :

les séries numériques $\sum a_n(f)$ et $\sum b_n(f)$ sont absolument convergentes.

et pour tout réel x, la série numérique $S(f)(x)$ converge vers $f(x)$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ a_0(f)+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\times\cos(n\omega x)+b_n(f)\times\sin(n\omega x)=f(x)$$



Des résultats utiles : $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\cos(n\pi)=(-1)^n \quad \text{et} \quad \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\sin(n\pi)=0 \quad \text{et} \quad \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n$$

$$(-1)^n+1=\begin{cases}2 & \text{si } n \text{ est pair}\\ 0 & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$$