# Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Dans ce chapitre, le corps des scalaires noté $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E désigne un $\mathbb{K}$_espace vectoriel.



--------------

## 1. Espaces vectoriels

Définition d'une famille finie libre : soit $(v_1;v_2;\dots v_n)$ une famille de $n$ vecteurs de E.

$$(v_1;v_2;\dots v_n) \text{ est libre si et seulement si : } \left.\begin{array}{r}\alpha_1\in\mathbb{K},\dots,\alpha_n\in\mathbb{K}\\ \alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n=0_E\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$$

Remarques : Une famille non-libre est dite liée.
Si $(v_1;v_2;\dots v_n)$ est une famille libre alors aucun des vecteurs $v_i$ n'est nul.
Unicité de la décomposition d'un vecteur : Soit $(v_1;v_2;\dots v_n)$ est une famille libre et $v\in vect(v_1;\dots v_n)$ alors il existe un unique $n$_uplet $(\alpha_1;\dots;\alpha_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $v=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n$

Propriétés caractéristiques : Soit $(v_1;v_2;\dots v_n)$ une famille de $n$ vecteurs de E :

La famille $(v_1;v_2;\dots;v_n)$ est libre si et seulement si : $\forall(\alpha_1;\alpha_2;\dots;\alpha_n)\in\mathbb{K}^n\setminus\{0_{\mathbb{K}^n}\}$ , $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n\neq 0_E$
La famille $(v_1;v_2;\dots;v_n)$ est liée si et seulement si : $\exists(\alpha_1;\alpha_2;\dots;\alpha_n)\in\mathbb{K}^n\setminus\{0_{\mathbb{K}^n}\}$ tel que $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n=0_E$

Remarques : La famille $(v_1)$ est libre si et seulement si $v_1\neq 0_E$
La famille $(v_1;v_2)$ est libre si et seulement si les vecteurs $v_1$ et $v_2$ ne sont pas colinéaires.
La famille $(v_1;v_2;v_3)$ est libre si et seulement si les vecteurs $v_1$ , $v_2$ et $v_3$ ne sont pas coplanaires.

Définition d'une famille infinie libre : soit I un ensemble de cardinal infini (dénombrable ou non) et $(v_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E alors la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si toute sous famille finie de $(v_i)_{i\in I}$ est libre.

Exemple : dans $\mathbb{R}[X]$ la famille $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est libre.

Propriété d'inclusion : toute famille incluse dans une famille libre est libre.
toute famille contenant une famille liée est liée.

Sous-espace vectoriel engendré par une famille : soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E alors l'ensemble des vecteurs combinaisons linéaires d'un nombre fini d'éléments de $(v_i)_{i\in I}$ noté $Vect((x_i)_{i\in I})\overset{\text{def}}{=}\left\{\sum_{i\in J}\alpha_i v_i | J\subset I, J \text{ finie}, \forall i\in J, \alpha_i\in\mathbb{K}\right\}$ est le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(v_i)_{i\in I}$ .

⚠ On n'envisage ici que la sommation d'un nombre fini de vecteurs car sommer un nombre infini de vecteurs peut poser des problèmes de convergence de la somme.
Exemple : $\mathbb{R}[X]=\dots$

Définition d'une famille génératrice d'un espace vectoriel : soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

$$\boxed{\text{La famille } (v_i)_{i\in I} \text{ est génératrice (de E) si et seulement si } E=vect\left((v_i)_{i\in I}\right)}$$

Remarque : il faut comprendre cette égalité d'ensemble comme une double inclusion : $vect\left((v_i)_{i\in I}\right)\subset E$ (évident par stabilité) et $E\subset vect\left((v_i)_{i\in \mathbb{N}}\right)$ qui signifie que tout vecteur de E est une combinaison linéaire de vecteurs de la famille $(v_i)_{i\in I}$.
Exemple :

Définition d'une base d'un espace vectoriel : $\boxed{\text{une base de E est une famille libre et génératrice de E}}$.

Remarque : dans ce cas tout vecteur de E (famille génératrice) s'exprime de manière unique (famille libre) comme combinaison linéaire de vecteurs de la famille $(v_i)_{i\in I}$.
Remarque : une base de E peut avoir un nombre infini d'éléments, on dit alors que E est de dimension infinie.

Définition d'une application linéaire : soient E et F deux espaces vectoriels et $f$ une application de E dans F.

$$\boxed{f \text{ est linéaire si et seulement si } \begin{cases}\forall u\in E \text{ et } \forall v\in E,\ f(u+v)=f(u)+f(v)\\ \forall u\in E \text{ et } \forall\lambda\in K,\ f(\lambda u)=\lambda f(u)\end{cases}}$$

On note $L(E;F)$ l'ensemble des application linéaires de E dans F.

Définition d'une équation linéaire : soit $f\in L(E;F)$ et $b\in F$, l'équation $\boxed{f(x)=b}$ est une équation linéaire :

de second membre le vecteur $b\in F$
d'inconnue le vecteur $x\in E$
d'équation homogène associée $f(x)=0_F$

Remarques : Cas de l'équation homogène : $f(x)=0_F \Leftrightarrow x\in \operatorname{Ker} f$

Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire, soit $f\in L(E;F)$ et $b\in F$ on considère l'équation $f(x)=b$.
Si $b\notin \operatorname{Im} f$ alors l'équation $f(x)=b$ n'admet aucune solution (équation incompatible).
Si $b\in \operatorname{Im} f$ alors l'équation $f(x)=b$ admet une solution particulière : un vecteur $x_0\in E$ tel que $f(x_0)=b$ et l'ensemble des solutions est $x_0+\operatorname{Ker} f \overset{\text{def}}{=} \{x_0+x \mid x\in \operatorname{Ker} f\}$

Remarque : $x_0+\operatorname{Ker} f$ n'est pas un sous-espace vectoriel mais un sous-espace affine.
Démonstration : $f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow f(x)-f(x_0)=0_F \Leftrightarrow f(x-x_0)=0_F$

Exemple en dimension finie : le système linéaire $\begin{cases}ax+by+cz=-d\\ a'x+b'y+c'z=-d'\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b & c\\ a' & b' & c'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-d\\ -d'\end{pmatrix}$

Exemple en dimension infinie : soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et l'endomorphisme $\begin{cases}\phi_\lambda : C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})\to C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})\\ \qquad f\mapsto f'-\lambda f\end{cases}$

L'équation $\forall x\in\mathbb{R},\ (\phi_\lambda(f))(x)=x^2$ d'inconnue $f$ correspond l'équation différentielle : $y'-\lambda y=x^2$ ...

Rappel : pour déterminer $Ker\, f$ ou $\operatorname{Im} f$ il peut être utile d'invoquer le théorème du rang.

$$\boxed{\text{Si } f\in L(E;F) \text{ et si E est de dimension finie alors } dim(E)=rg(f)+dim(\operatorname{Ker} f)}$$

⚠ Même pour les endomorphismes, en général $E\neq \operatorname{Im}(f)\oplus Ker(f)$ … sauf pour les projections.
Pour deux sous-espaces vectoriels F et G de dimensions finies :

$$\boxed{\left.\begin{aligned}dim(F)=dim(G)\\ F\subset G\end{aligned}\right\}\Rightarrow F=G}$$

Ainsi pour déterminer une base d'un sous-espace vectoriel G connaissant sa dimension il suffit d'exhiber une famille libre de G de cardinal $dim(G)$ : $\boxed{\left.\begin{aligned}n=dim(G)\\ (e_1,\dots,e_n) \text{ est une famille libre}\\ \forall i\in[\![1;n]\!],\ e_i\in G\end{aligned}\right\}\Rightarrow Vect(e_1,\dots,e_n)=G}$

Principe de superposition des solutions : soit $f\in L(E;F)$, $b_1\in \operatorname{Im} f$ et $b_2\in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $x_1\in E$ et $x_2\in E$ tels que $f(x_1)=b_1$ et $f(x_2)=b_2$ et l'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=b_1+b_2$ est $x_1+x_2+\operatorname{Ker} f$.

Démonstration : $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)=b_1+b_2$ donc $x_1+x_2$ est une solution particulière.
Exemple :

## 2. Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

Définition d'une valeur propre d'un endomorphisme : soit $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ et un scalaire $\lambda \in \mathrm{K}$ .

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } f \text{ si et seulement s'il existe } x \in \mathrm{E}\,,\ x \neq 0_{\mathrm{E}} \text{ tel que } f(x) = \lambda\, x$$

Remarque : $\lambda$ est une valeur propre de $f$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \neq \{0_{\mathrm{E}}\}$ .
L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme $f$ est appelé spectre de $f$ et noté :

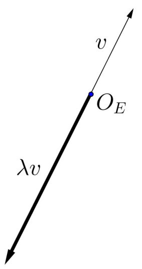
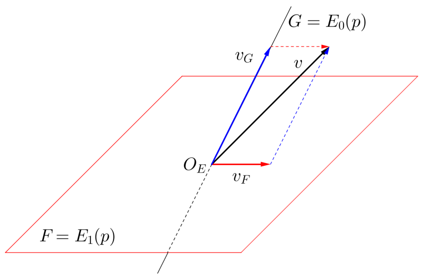
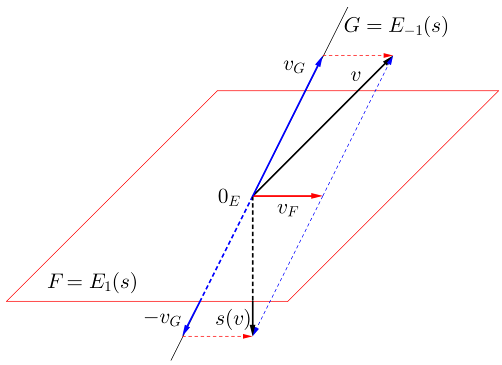
$$\mathrm{Sp}(f) \overset{\text{def}}{=} \{\lambda \in \mathrm{K} \mid \mathrm{Ker}(f - \lambda\, Id_{\mathrm{E}}) \neq \{0_{\mathrm{E}}\}\}$$

Définition du sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda$ : soit $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ et $\lambda$ une valeur propre de $f$ alors le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda$ est le sous-espace vectoriel $\boxed{\mathrm{E}_\lambda(f) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Ker}(f - \lambda\, Id_{\mathrm{E}})}$ .

Définition d'un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$ : soit $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ et $\lambda$ une valeur propre de $f$ alors tout vecteur non nul appartenant au sous-espace propre $\mathrm{E}_\lambda(f)$ est appelé vecteur propre de l'endomorphisme $f$ associé à la valeur propre $\lambda$ .

⚠ Chaque valeur propre admet une infinité de vecteurs propres.

Éléments propres de quelques endomorphismes de référence :

| | Homothétie $h$ | Projection $p$ | Symétrie $s$ |
|---|---|---|---|
| Définition | Homothétie de rapport $\lambda \in \mathrm{K}$ | $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$<br>Projection sur F parallèlement à G<br>Pour $v = v_{\mathrm{F}} + v_{\mathrm{G}}$ , $v_{\mathrm{F}} \in \mathrm{F}$ et $v_{\mathrm{G}} \in \mathrm{G}$<br>$p(v) = v_{\mathrm{F}}$ | $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$<br>Symétrie par rapport à F, parallèlement à G<br>Pour $v = v_{\mathrm{F}} + v_{\mathrm{G}}$ , $v_{\mathrm{F}} \in \mathrm{F}$ et $v_{\mathrm{G}} \in \mathrm{G}$<br>$s(v) = v_{\mathrm{F}} - v_{\mathrm{G}}$ |
| Illustration |  |  |  |
| Caractérisation | $\forall v \in \mathrm{E}\,,\ h(v) = \lambda\, v$ | $\forall v \in \mathrm{E}\,,\ p^2(v) = p(v)$ | $\forall v \in \mathrm{E}\,,\ s^2(v) = v$<br>Lien avec la projection sur G :<br>$s_{\mathrm{F}} = Id - 2\, p_{\mathrm{G}}$ |
| Spectre | $\mathrm{Sp}(h) = \{\lambda\}$ | $\mathrm{Sp}(p) = \{0\,;1\}$ | $\mathrm{Sp}(s) = \{-1\,;1\}$ |
| Sous-espaces propres | $\mathrm{E}_\lambda(h) = \mathrm{E}$ | $\mathrm{E}_1(p) = \mathrm{Im}\, p = \mathrm{F}$ (invariants)<br>$\mathrm{E}_0(p) = \mathrm{Ker}\, p = \mathrm{G}$ (direction) | $\mathrm{E}_1(s) = \mathrm{F}$ (invariants)<br>$\mathrm{E}_{-1}(s) = \mathrm{G}$ (direction) |

Rappel : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Pour démontrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ il suffit de démontrer que $\begin{cases} \mathrm{F} \cap \mathrm{G} \subset \{0_{\mathrm{E}}\} \\ \mathrm{E} \subset \mathrm{F} + \mathrm{G} \end{cases}$

En effet le fait que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ soit un sous-espace vectoriel assure que $0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ et le fait que E soit un espace vectoriel assure que $\mathrm{F} + \mathrm{G} \subset \mathrm{E}$ .

Propriété de l'intersection de deux sous-espaces propres : les sous-espaces propres de deux valeurs propres distinctes sont en somme directe.

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow \mathrm{E}_\lambda(f) \cap \mathrm{E}_\mu(f) = \{0_{\mathrm{E}}\}$$

Démonstration : soit $v \in \mathrm{E}_\lambda(f) \cap \mathrm{E}_\mu(f)$ alors $f(v) = \ldots$

Propriété des familles finies de vecteurs propres : toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Démonstration : par récurrence finie.
Soit la proposition $\mathrm{P}_k$ : « tout famille de $k$ vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre »
Initialisation : pour $k=1$ ...
Donc la proposition $\mathrm{P}_1$ est validée.

Hérédité : soit $k$ un entier naturel fixé. Supposons que la proposition $\mathrm{P}_k$ soit vraie.
Soit $(v_i)_{i\in[1;k+1]}\in\mathrm{E}^{k+1}$ tels que $\forall i\in[\![1;k+1]\!]$, $v_i\in\mathrm{E}_{\lambda_i}(f)$ et $i\neq j \Rightarrow \lambda_i\neq\lambda_j$
$\forall(\alpha_i)_{i\in[1;k+1]}\in\mathrm{K}^{k+1}$, $f(\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_{k+1}v_{k+1})=\ldots$
Si $\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_{k+1}v_{k+1}=0_\mathrm{E}$ alors $\begin{cases} f(\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_{k+1}v_{k+1})=\ldots \\ \lambda_{k+1}(\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_{k+1}v_{k+1})=\ldots\end{cases}$ donc $\begin{cases}\lambda_1\alpha_1 v_1+\ldots+\lambda_{k+1}\alpha_{k+1}v_{k+1}=\ldots \\ \lambda_{k+1}\alpha_1 v_1+\ldots+\lambda_{k+1}\alpha_{k+1}v_{k+1}=\ldots\end{cases}$
Ainsi, par soustraction …

Et comme $\mathrm{P}_k$ est supposée vraie...

De plus, $i\neq j \Rightarrow \lambda_i\neq\lambda_j$, donc...

Ainsi, la proposition $\mathrm{P}_{k+1}$ est validée.

Conclusion : ...

Corollaire : soit E un espace vectoriel E est de dimension finie $n$ et $f\in\mathrm{L}(\mathrm{E})$ alors $f$ admet au maximum $n$ valeurs propres distinctes.

## 3. Déterminants

### a) Déterminant de *n* vecteurs dans une base

On appelle « forme linéaire » toute application de $\mathrm{L}(\mathrm{E};\mathrm{K})$.

Définition d'une forme $n$_linéaire : soit $f$ une application de $\mathrm{E}^n=\overbrace{\mathrm{E}\times\ldots\times\mathrm{E}}^{n\text{ fois}}$ dans $\mathrm{K}$. L'application est une forme $n$_linéaire si et seulement si elle est linéaire par rapport à chacune de ses composantes :

$\forall k\in[\![1;n]\!]$, additivité pour la $k$-ième composante : $\forall (v_i)_{i\in[1;n]}\in\mathrm{E}^n$, $\forall u\in\mathrm{E}$,

$$f(v_1;\ldots;v_{k-1};v_k+u;v_{k+1};\ldots;v_n)=f(v_1;\ldots;v_{k-1};v_k;v_{k+1};\ldots;v_n)+f(v_1;\ldots;v_{k-1};u;v_{k+1};\ldots;v_n)$$

$\forall k\in[\![1;n]\!]$, homogénéité pour la $k$-ième composante : $\forall (v_i)_{i\in[1;n]}\in\mathrm{E}^n$, $\forall\lambda\in\mathrm{K}$,

$$f(v_1;\ldots;v_{k-1};\lambda v_k;v_{k+1};\ldots;v_n)=\lambda f(v_1;\ldots;v_{k-1};v_k;v_{k+1};\ldots;v_n)$$

L'ensemble des formes $n$_linéaires de $\mathrm{E}^n$ dans K est noté $\mathrm{L}_n(\mathrm{E};\mathrm{K})$

⚠ Pour une forme $n$_linéaire, $f(\lambda v_1;\ldots;\lambda v_n)=\ldots$
et $f(u_1+v_1;\ldots;u_n+v_n)=\ldots$

Définition d'une forme $n$_linéaire alternée : soit $f$ une forme $n$_linéaire de $\mathrm{E}^n$ dans K. La forme $f$ est dite alternée si et seulement si l'égalité de deux composantes implique l'annulation de la forme, c'est-à-dire :

$$\left(\exists(i;j)\in[\![1;n]\!]^2,\begin{cases} i\neq j\\ v_i=v_j\end{cases}\right)\Rightarrow f(v_1;\ldots;v_i;\ldots;v_j;\ldots;v_n)=0$$

L'ensemble des formes $n$_linéaires alternées de $\mathrm{E}^n$ dans K est noté $\mathrm{A}_n(\mathrm{E};\mathrm{K})$.

Propriété d'antisymétrie d'une forme $n$_linéaire alternée sur K : soit $f$ une forme $n$_linéaire alternée de $\mathrm{E}^n$ dans K :

$$\forall (v_i)_{i\in[1;n]}\in\mathrm{E}^n,\ f(v_1;\ldots;v_{i-1};v_i;v_{i+1}\ldots;v_{j-1};v_j;v_{j+1};\ldots;v_n)=-f(v_1;\ldots;v_{i-1};v_j;v_{i+1}\ldots;v_{j-1};v_i;v_{j+1};\ldots;v_n)$$

Dans toute la suite de ce chapitre, le K_espace vectoriel E est de dimension $n$.

Théorème de structure de l'ensemble $\mathrm{A}_n(\mathrm{E};\mathrm{K})$ : soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$ alors $\mathrm{A}_n(\mathrm{E};\mathrm{K})$ est un K_espace vectoriel de dimension 1.

Démonstration : $\mathrm{A}_n(\mathrm{E};\mathrm{K})\neq\varnothing$ car...
Stabilité : ...

Dimension : Soit $f \in A_n(E;K)$ non nulle (l'existence d'un tel objet est admise), $g \in A_n(E;K)$ et $B=(e_1;\dots;e_n)$ une base de E.
Soit $(v_i)_{i\in[1;n]}\in E^n$ alors il existe un unique $n^2$_uplet $(\alpha_{i,j})\in K^{n^2}$ telles que $\forall k\in[\![1;n]\!]$, $v_k=\alpha_{1,k}e_1+\dots+\alpha_{n,k}e_n$
$f(v_1;\dots;v_n)=\alpha_{1,1}f(e_1;v_2;\dots;v_n)+\dots+\alpha_{n,1}f(e_n;v_2;\dots;v_n)$ par linéarité sur la 1ère composante
$f(v_1;\dots;v_n)=\alpha_{1,1}(\alpha_{1,2}f(e_1;e_1;\dots;v_n)+\dots+\alpha_{n,2}f(e_n;e_n;\dots;v_n))+\dots$
$+\alpha_{n,1}(\alpha_{1,2}f(e_1;e_1;\dots;v_n)+\dots+\alpha_{n,2}f(e_n;e_n;\dots;v_n))$ par linéarité sur la 2ème composante (somme de... termes)
Après développements successifs sur les $n$ composantes $f(v_1,\dots v_n)$ s'exprime comme somme … de termes du type : $\alpha_{i,j}f(e_{k_1};\dots e_{k_n})$ avec $(k_l)\in[\![1;n]\!]^n$, ainsi s'il existe $k_l=k_{l'}$ on a $f(e_{k_1};\dots;e_{k_n})=0$
sinon, après permutation, on a : $f(e_{k_1};\dots;e_{k_n})=\pm f(e_1;\dots;e_n)$
Il existe un scalaire $k$ qui ne dépend que de la décomposition des vecteurs $v_i$ dans la base B tel que :

$$f(v_1;\dots;v_n)=k\times f(e_1;\dots;e_n) \in K$$

Les même opérations (avec les mêmes coefficients) permettent d 'obtenir :

$$g(v_1;\dots;v_n)=k\times g(e_1;\dots;e_n) \in K$$

Or $f(e_1;\dots;e_n)=0$ est impossible car sinon $f=0_{A_n(E;K)}$

On a donc : $g(v_1;\dots;v_n)=\dfrac{f(v_1;\dots;v_n)}{f(e_1;\dots;e_n)}\times g(e_1;\dots;e_n)$

Donc $\forall (v_i)_{i\in[1;n]}\in E^n$, $g(v_1;\dots;v_n)=\dfrac{g(e_1;\dots e_n)}{f(e_1;\dots;e_n)}\times f(v_1;\dots;v_n)$

Donc les formes $f$ et $g$ sont proportionnelles.

Corollaire d'existence et d'unicité pour une base donnée : soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$ et $(e_1;\dots e_n)$ une base de E. Alors il existe une unique forme $f$, $n$_linéaire alternée sur $E^n$, telle que $f(e_1;\dots;e_n)=1$.

Démonstration : l'existence de $f$ est admise.
Unicité : Soit $f \in A_n(E;K)$ et $g \in A_n(E;K)$ telles que $f(e_1;\dots;e_n)=g(e_1;\dots;e_n)=1$.
La formule précédente donne : Donc $\forall (v_i)_{i\in[1;n]}\in E^n$, $g(v_1;\dots;v_n)=\dfrac{1}{1}\times f(v_1;\dots;v_n)$, donc $f=g$.

Définition du déterminant dans une base donnée : soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$ et $B=(e_1;\dots;e_n)$ une base de E. L'unique forme $n$_linéaire alternée sur $E^n$ telle prenant la valeur 1 pour le $n$_uplet $(e_1;\dots;e_n)$ est le déterminant dans la base B noté $Det_B$.

Exemple : $u\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}_B$, $v\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_B$ et $w\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}_B$ alors $Det_B(u;v;w)=\dots$

⚠ Les formules dans le plan et dans l'espace liant le déterminant de 2 ou 3 vecteurs à une aire ou à un volume ne sont valides que si B est une base orthonormée directe. Ici l'espace vectoriel E n'est a priori pas muni d 'un produit scalaire, il est donc impossible de donner ce type d'interprétation.

Propriété d'invariance de $Det_B$ : soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$ et $B=(e_1;\dots;e_n)$ une base de E.

$$\forall (v_i)_{i\in[1;n]}\in E^n,\ \forall(\alpha_k)\in K^n,\ \forall i\in[\![1;n]\!],\ Det_B(v_1;\dots;v_n)=Det_B\left(v_1;\dots;v_{i-1};\sum_{k=1}^{i-1}\alpha_k v_k+v_i+\sum_{k=i+1}^{n}\alpha_k v_k;v_{i+1};\dots;v_n\right)$$

$Det_B$ est invariant par ajout sur une composante d'une combinaison linéaire des autres composantes.

Démonstration : développement par rapport à la $i$-ème composante.

Formule de changement de base (relation de Chasles) : soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$, $B=(e_1;\dots;e_n)$ et $B'=(e'_1;\dots;e'_n)$ deux bases de E. Alors : $\boxed{\forall(v_1;\dots;v_n)\in E^n, Det_B(v_1;\dots;v_n)=Det_B(e'_1;\dots;e'_n)\times Det_{B'}(v_1;\dots;v_n)}$

Démonstration : $Det_B\in A_n(E;K)$ et $Det_{B'}\in A_n(E;K)$ donc il existe $k\in K$ tel que :
$\forall(v_1;\dots;v_n)\in E^n, Det_B(v_1;\dots;v_n)=k\times Det_{B'}(v_1;\dots;v_n)$
Et en particulier, $Det_B(e'_1;\dots;e'_n)=\dots$

Caractérisation des bases : soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$ et $(v_1;\ldots;v_n)$ une famille de $n$ vecteurs de E.

La famille $(v_1;\ldots;v_n)$ est une base de E

$\Leftrightarrow$

Pour toute base B de E, $Det_{\mathrm{B}}(v_1;\ldots;v_n)\neq 0$

$\Leftrightarrow$

Il existe une base B de E telle que $Det_{\mathrm{B}}(v_1;\ldots;v_n)\neq 0$

Démonstration : Si $\mathrm{B}'=(v_1;\ldots;v_n)$ est une base alors la formule de changement de base donne, ...

Réciproquement, pour montrer que : $Det_{\mathrm{B}}(v_1;\ldots;v_n)\neq 0 \;\Rightarrow\; (v_1;\ldots v_n)$ est une base de E

On peut démontrer la contraposée : ...

## b) Déterminant d'un endomorphisme

Théorème d'indépendance par rapport à la base : soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$, $\mathrm{B}=(\mathrm{e}_1;\ldots;\mathrm{e}_n)$ et $\mathrm{B}'=(\mathrm{e}'_1;\ldots,\mathrm{e}'_n)$ deux bases de E et $f\in\mathrm{L}(\mathrm{E})$.

$$Det_{\mathrm{B}}(f(\mathrm{e}_1);\ldots;f(\mathrm{e}_n))=Det_{\mathrm{B}'}(f(\mathrm{e}'_1);\ldots;f(\mathrm{e}'_n))$$

Démonstration :

L'application $\phi_{\mathrm{B}}$ qui à tout $n$_uplet $(v_1;\ldots;v_n)\in\mathrm{E}^n$ associe $\phi_{\mathrm{B}}(v_1;\ldots;v_n)=Det_{\mathrm{B}}(f(v_1);\ldots;f(v_n))$ est une forme $n$_linaire alternée, ainsi, il existe $k\in\mathrm{K}$ tel que : $\forall\ (v_1;\ldots;v_n)\in\mathrm{E}^n$, $\phi_B(v_1;\ldots;v_n)=k\times Det_{\mathrm{B}}(v_1;\ldots;v_n)$

Or $\phi_B(\mathrm{e}_1;\ldots;\mathrm{e}_n)=k\,Det_{\mathrm{B}}(\mathrm{e}_1;\ldots;\mathrm{e}_n)=k$, ainsi, $\forall\ (v_1;\ldots;v_n)\in\mathrm{E}^n$, $\phi_B(v_1;\ldots;v_n)=\phi_B(\mathrm{e}_1;\ldots;\mathrm{e}_n)\times Det_{\mathrm{B}}(v_1;\ldots;v_n)$ (1)

Par ailleurs, la formule de changement de base donne $\phi_{\mathrm{B}}(v_1;\ldots;v_n)=Det_{\mathrm{B}}(\mathrm{e}'_1;\ldots;\mathrm{e}'_n)\times Det_{\mathrm{B}'}(f(v_1);\ldots;f(v_n))$ (2)

Ainsi les égalités (1) et (2) donnent :

$$\forall\ (v_1;\ldots;v_n)\in\mathrm{E}^n,\ \phi_{\mathrm{B}}(\mathrm{e}_1;\ldots;\mathrm{e}_n)\times Det_{\mathrm{B}}(v_1;\ldots;v_n)=Det_{\mathrm{B}}(\mathrm{e}'_1;\ldots;\mathrm{e}'_n)\times Det_{\mathrm{B}'}(f(v_1);\ldots;f(v_n))$$

Et en particulier...

Définition : soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$ et $f\in\mathrm{L}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{B}=(\mathrm{e}_1;\ldots;\mathrm{e}_n)$ une de E. Le déterminant de l'endomorphisme $f$ est indépendant du choix de la base B et : $\boxed{Det(f)\overset{\text{def}}{=}Det_{\mathrm{B}}(f(\mathrm{e}_1);\ldots;f(\mathrm{e}_n))}$

Théorème du déterminant de la composée : soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$, $f\in\mathrm{L}(\mathrm{E})$ et $g\in\mathrm{L}(\mathrm{E})$, alors :

$$\boxed{Det(f\circ g)=Det(f)\times Det(g)}$$

Démonstration : Soit $\mathrm{B}=(\mathrm{e}_1;\ldots\mathrm{e}_n)$, les applications qui à tout $n$_uplet $(v_1;\ldots;v_n)\in\mathrm{E}^n$ associent $Det_{\mathrm{B}}(f(v_1);\ldots;f(v_n))$ et $Det_{\mathrm{B}}(v_1;\ldots;v_n)$ sont des éléments de $\mathrm{A}_n(\mathrm{E};\mathrm{K})$ donc, il existe $k\in\mathrm{K}$ tel que :

$\forall\ (v_1;\ldots;v_n)\in\mathrm{E}^n$, $Det_{\mathrm{B}}(f(v_1);\ldots;f(v_n))=k\times Det_{\mathrm{B}}(v_1;\ldots;v_n)$

En particulier $Det(f)=Det_{\mathrm{B}}(f(\mathrm{e}_1);\ldots;f(\mathrm{e}_n))=k\times 1$

Donc, $\forall\ (v_1;\ldots;v_n)\in\mathrm{E}^n$, $Det_{\mathrm{B}}(f(v_1);\ldots;f(v_n))=Det(f)\times Det_{\mathrm{B}}(v_1;\ldots;v_n)$

Ainsi,...

Caractérisation des automorphismes : soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$ et $f\in\mathrm{L}(\mathrm{E})$.

$$\boxed{f\in Aut(E)\Leftrightarrow Det(f)\neq 0}$$

Si $f\in Aut(\mathrm{E})$ alors $\boxed{Det(f^{-1})=\dfrac{1}{Det(f)}}$

Démonstration : Si $f\in Aut(\mathrm{E})$ alors, $f^{-1}\in\mathrm{L}(\mathrm{E})$ et $Det(f\circ f^{-1})=Det(f)\times Det(f^{-1})$

Or $f\circ f^{-1}=Id_{\mathrm{E}}$ et $Det(Id_{\mathrm{E}})=Det_{\mathrm{B}}(\mathrm{e}_1;\ldots;\mathrm{e}_n)=1$ donc...

Réciproquement si $Det(f)\neq 0$ alors $(f(\mathrm{e}_1);\ldots;f(\mathrm{e}_n))$ est une base de E donc...

Remarque : $det$ est un morphisme de groupe de $(Aut(\mathrm{E});\circ)$ dans $(\mathrm{K};\times)$

## c) Déterminant d'une matrice carrée

Une matrice carrée $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in M_n(K)$ est notée $A=(a_{i,j})$. On peut retenir que le coefficient général est désigné par : $a_{ligne,colonne}$.

Définition du déterminant d'une matrice carrée : soit $A=(a_{i,j})$ alors en notant le déterminant de la matrice A noté $Det(A)$ est le déterminant de ses « vecteurs colonnes ». Ainsi pour une base B de E,en notant :

$$\boxed{v_1\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}_B, \dots, v_j\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}_B ;\dots ; v_n\begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix}_B \text{ on a } Det(A) \overset{\text{def}}{=} Det_B(v_1;\dots;v_n)}$$

Remarque : cette définition est indépendante du choix de la base B (cf formule de changement de base pour le déterminant) et on note $Det(A)=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

Propriété liant le déterminant d'une matrice carrée et le déterminant d'un endomorphisme : soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$, $f \in L(E)$, $A \in M_n(K)$ et B une base de E.

$$\boxed{\text{Si } A=\underset{B}{Mat}(f) \text{ alors } Det(A)=Det(f)}$$

Démonstration : soit $B=(e_1;\dots;e_n)$, si $A=\underset{B}{Mat}(f)$ alors $e_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_B$

$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\dots$ donc $f(e_1)\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}_B$ etc...

En d'autre termes, les « vecteurs colonnes » sont les coordonnées des vecteurs $f(e_i)$ exprimés dans la base B.
Remarque : cette propriété est indépendante du choix de la base B.

Propriétés du déterminant d'une matrice carrée : Soient $A \in M_n(K)$ et $B \in M_n(K)$,

- Déterminant du produit de deux matrices carrées : $\boxed{Det(AB)=Det(A)\times Det(B)}$
- Caractérisation de l'inversibilité : $\boxed{A \in GL_n(K) \Leftrightarrow Det(A) \neq 0}$
- Déterminant de l'inverse d'une matrice carrée : si A est inversible alors $\boxed{Det(A^{-1})=\dfrac{1}{Det(A)}}$
- Homogénéité de degré $n$ :Soit $\lambda \in K$ alors $\boxed{Det(\lambda A)=\lambda^n Det(A)}$
- Conjugaison complexe : si $A \in M_n(\mathbb{C})$ alors $\boxed{Det(\overline{A})=\overline{Det(A)}}$
- Déterminant de la transposée d'une matrice carrée : $\boxed{Det({}^tA)=Det(A)}$

Démonstrations : conséquences des propriétés du déterminant d'un endomorphisme, sauf la dernière qui est admise.

Rappels sur l'application transposée : Soit $A \in M_n(K)$, $B \in M_n(K)$ et $\lambda \in K$ :

$${}^t({}^tA)=A$$
$${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$$
$${}^t(\lambda A)=\lambda\, {}^tA$$

L'application transposée est un isomorphisme de $M_n(K)$.

$${}^t(A\times B)={}^tB\times{}^tA$$
Si $A \in GL_n(K)$ alors ${}^t(A^{-1})=({}^tA)^{-1}$

Calcul du déterminant par développement suivant une ligne ou une colonne :

Dans chaque cas, les lignes et colonnes grisées sont enlevées de la matrice, ainsi le calcul du déterminant d'une carrée matrice de $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ est obtenu en sommant $n$ déterminants de matrices carrées de $\mathrm{M}_{n-1}(\mathrm{K})$. Ces formules sont admises.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$j$-ième colonne

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{1+j} a_{1,j} \times \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{i+j} a_{i,j} \times \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+j} a_{n,j} \times \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Le déterminant étant une forme $n$ _linéaire alternée, les opérations sur les colonnes du type $\mathrm{C}_j \leftarrow \mathrm{C}_j + \sum_{k \neq j} \alpha_k \mathrm{C}_k$ laissent le déterminant inchangé.

$$\begin{array}{c} i\text{-ème ligne} \end{array} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} a_{i,1} \times \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{i+j} a_{i,j} \times \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+j} a_{i,n} \times \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Le déterminant est aussi une forme $n$ _linéaire alternée par rapport aux lignes, ainsi les opérations sur les lignes du type $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \sum_{k \neq i} \alpha_k \mathrm{L}_k$ laissent le déterminant inchangé.

Remarques : l'alternance du signe de $(-1)^{i+j}$ peut être schématisée par : $\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est égal au produit des éléments diagonaux.

Définition des matrices semblables : soient $A \in M_n(K)$ et $A' \in M_n(K)$.

$$\boxed{\text{Les matrices A et A' sont semblables si et seulement s'il existe } P \in GL_n(K) \text{ telle que } A' = P^{-1} A P .}$$

Interprétation de la similitude en terme de changement de base : soient E un K_espace vectoriel de dimension $n$, $A \in M_n(K)$ et $A' \in M_n(K)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{A et A' sont semblables si et seulement si}\\ \text{A et A' sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases de E}\end{array}}$$

Démonstration : soit $A = \underset{B}{Mat}(f)$ et $A' = \underset{B}{Mat}'(f)$, P est la matrice de passage de B vers B' : $P = P_B^{B'}$.

Théorème : le déterminant est un invariant de similitude.

$$\boxed{\text{Si A et A' sont semblables alors } Det(A) = Det(A')}$$

Démonstration : $Det(A) = Det(PA'P^{-1}) = \ldots$

⚠ La réciproque n'est pas valide.

Déterminant d'un matrice triangulaire par blocs : Soit $A \in M_p(K)$, $B \in M_{p,n-p}(K)$ et $D \in M_{n-p}(K)$ alors :

$$\boxed{Det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = Det(A) \times Det(D)}$$

Résultat admis.

Remarque : les matrice A et D sont carrées mais pas nécessairement la matrice B.

Exemple : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 13 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & 18 & 19 & 20 \\ 0 & 0 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} =$

## 4. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

Définition du polynôme caractéristique d'un endomorphisme : soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$ et $f \in L(E)$ alors le polynôme caractéristique de $f$ est $\boxed{\chi_f(X) \overset{\text{def}}{=} Det(f - X\, Id_E)}$

Propriétés du polynôme caractéristique d'un endomorphisme : soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$ et $f \in L(E)$,

$$\chi_f(X) \in K_n[X] \text{ et } \boxed{\chi_f(X) = (-1)^n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + Det(f)}$$

Démonstration : soit $B = (e_1; \ldots; e_n)$ alors $Det(f - X\, Id_E) = Det(f(e_1) - X e_1; \ldots; f(e_n) - X e_n)$ ...

Remarque : la trigonalisation (plus loin dans ce cours) permettra de déterminer le coefficient $a_{n-1}$ ...

Caractérisation des valeurs propres d'un endomorphisme : soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$ et $f \in L(E)$. Les valeurs propres d'un endomorphisme sont les racines de son polynôme caractéristique :

$$\boxed{\lambda \in sp(f) \Leftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0}$$

Démonstration : $\lambda \in sp(f) \quad \Leftrightarrow \quad Ker(f - \lambda\, Id_E) \neq 0_E$

Or $f - \lambda\, Id_E \in L(E)$ donc...

Ordre de multiplicité d'une valeur propre d'un endomorphisme : soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$, $f \in L(E)$ et $\lambda \in sp(f)$ alors l'ordre de multiplicité de la racine $\lambda$ pour le polynôme $\chi_f(X)$ est appelée ordre de multiplicité de la valeur propre $\lambda$ de l'endomorphisme $f$ et noté : $m_\lambda(f)$.

Exemple : Si $\chi_f(X) = -(X+1)^2(X-2)$ alors...

Remarque : si $\lambda \in sp(f)$ alors $1 \leqslant m_\lambda(f) \leqslant n$

Théorème de minoration de l'ordre de multiplicité d'une valeur propre : soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$, $f \in L(E)$ et $\lambda \in sp(f)$ alors l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\lambda$ est minoré par la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda$ : $\boxed{dim(E_\lambda(f)) \leqslant m_\lambda(f)}$

Démonstration : Soit $k = dim(E_\lambda(f))$ et $(e_1;\ldots;e_k)$ une base de $E_\lambda(f)$ complétée en une base $B=(e_1;\ldots;e_k;\ldots e_n)$ de E.
Alors $Det(f - X\,Id_E) = det_B(f(e_1) - X\,e_1;\ldots;f(e_k) - X\,e_k;\ldots;f(e_n) - X\,e_n)$
Or $\forall i \in [\![1;k]\!]$, $f(e_i) = \lambda e_i$ ainsi, par développement sur les $k$ premières composantes...

Remarque : $dim(E_\lambda(f)) \geqslant 1$ ainsi : $m_\lambda(f) = 1 \Rightarrow dim(E_\lambda(f)) = 1$

<u>Définition des endomorphismes diagonalisables</u> : soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$ et $f \in L(E)$.

L'endomorphisme $f$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de $f$.

Remarque : quand l'endomorphisme est diagonalisable on obtient une base B de diagonalisation par réunion des bases de chacun des sous-espaces propres. Dans ce cas, la matrice de l'endomorphisme $f$ dans la base B est une matrice diagonale : si $sp(f) = \{\lambda_1;\ldots;\lambda_k\}$ et si $f$ est diagonalisable avec B pour base de diagonalisation alors :

$$\underset{B}{mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ddots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & \lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & 0 & \ddots & 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_k & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ddots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$ Chaque $\lambda_i$ est présent $dim(E_{\lambda_i}(f)) = m_{\lambda_i}(f)$ fois sur la diagonale.

<u>Caractérisation des endomorphismes diagonalisables à l'aide des des dimensions des sous-espaces propres</u> : soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$ et $f \in L(E)$.

L'endomorphisme $f$ est diagonalisable

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{\lambda \in sp(f)} dim(E_\lambda(f)) = dim(E)$$

$\Leftrightarrow$

$\chi_f(X)$ est scindé sur K et $\forall \lambda \in sp(f)$, $m_\lambda(f) = dim(E_\lambda(f))$

Théorème admis.

<u>Corollaire</u> : soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$ et $f \in L(E)$.

Si l'endomorphisme $f$ admet $n$ valeurs propres distinctes alors $f$ est diagonalisable.

Remarques : si le polynôme caractéristique $P_f(X)$ possède $n$ racines distinctes (i.e. est scindé et à racines simples) alors $f$ est diagonalisable.
⚠ Les réciproques de ces propriétés ne sont pas valides.

<u>Définition d'un endomorphisme trigonalisable</u> : soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$ et $f \in L(E)$.

$f$ est trigonalisable si et seulement s'il existe une base B de E telle que $\underset{B}{Mat}(f)$ soit triangulaire supérieure.

Remarque : si $sp(f) = \{\lambda_1;\ldots;\lambda_k\}$ et si $f$ est trigonalisable alors il existe une base B de trigonalisation telle que :

$$\underset{B}{mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ddots & * & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & \lambda_1 & * & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & 0 & \ddots & * & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_k & * & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ddots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$ Chaque $\lambda_i$ est présent $m_{\lambda_i}(f)$ fois sur la diagonale.

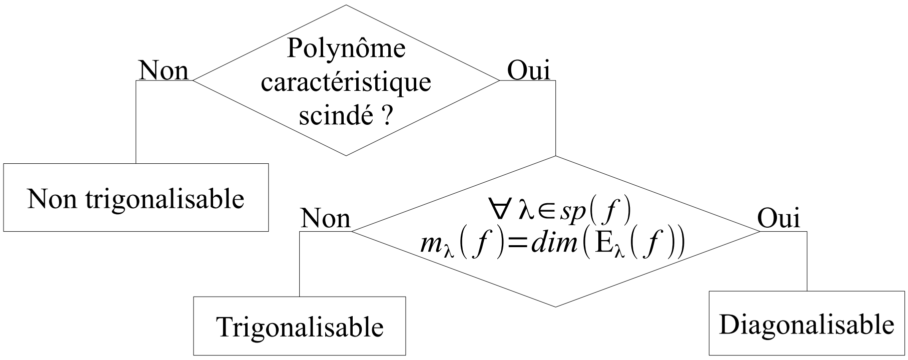
<u>Caractérisation des endomorphismes trigonalisables</u> : soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$ et $f \in L(E)$.

$f$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique $\chi_f(X)$ est scindé sur K

Théorème admis.
Remarque : un endomorphisme diagonalisable est a fortiori trigonalisable.

Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ _espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.
Exemple et contre-exemple :
Si E est un $\mathbb{R}$ _espace vectoriel et $\chi_f(\mathrm{X})=-\mathrm{X}^3+1$ alors...

Si E est un $\mathbb{R}$ _espace vectoriel et $\chi_f(\mathrm{X})=\mathrm{X}^4-\mathrm{X}^3$ alors...




## 5. Réduction des matrices carrées

Définition des valeurs propres d'une matrice carrée : soit $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ et $\lambda\in\mathrm{K}$.

$\lambda$ est une valeur propre de la matrice A si et seulement s'il existe $\mathrm{V}\in\mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K})$ non nulle telle que $\mathrm{AV}=\lambda\mathrm{V}$.
L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de A et noté $sp(\mathrm{A})$

Définition des vecteurs propres d'une matrice carrée : soit $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ et $\lambda\in sp(\mathrm{A})$.

$\mathrm{V}\in\mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K})$ est un vecteur propre de A associée à la valeur propre $\lambda$ si et seulement si $\mathrm{V}\neq 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K})}$ et $\mathrm{AV}=\lambda\mathrm{V}$.

Lien avec les endomorphismes : soit B une base d'un espace vectoriel E et $f\in\mathrm{L}(\mathrm{E})$.
$v\in\mathrm{E}$ est un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda$ $\Leftrightarrow$ $v\neq 0_{\mathrm{E}}$ et $Mat_{\mathrm{B}}(f)\times[v]_{\mathrm{B}}=\lambda[v]_{\mathrm{B}}$

Définition des sous-espaces propres d'une matrice carrée : soit $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ et $\lambda\in sp(\mathrm{A})$

Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\lambda$ est le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K})$ :
$$\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})\overset{\text{def}}{=}Ker(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_n)$$
L'ensemble des vecteurs propres de A associés à la valeur propre $\lambda$ est $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})\setminus\{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K})}\}$

Définition du polynôme caractéristique d'une matrice carrée : soit $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$.

Le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})=Det(\mathrm{A}-\mathrm{X}\,\mathrm{I}_n)\in\mathrm{K}_n[\mathrm{X}]$

Caractérisation des valeurs propres d'une matrice carrée : soit $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$. Les valeurs propres d'une matrice carrée sont les racines de son polynôme caractéristique : $\boxed{\lambda\in sp(\mathrm{A})\Leftrightarrow\chi_{\mathrm{A}}(\lambda)=0}$

Corollaire pour les matrice triangulaires : Si $\mathrm{T}=(t_{i,j})\in\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ est une matrice triangulaire alors $sp(\mathrm{T})=\{\mathrm{t}_{ii}|i\in[\![1;n]\!]\}$.
On peut retenir qu'une matrice triangulaire a toutes ses valeurs propres et rien que ses valeurs propres sur sa diagonale.

Démonstration : la matrice $(\mathrm{T}-\mathrm{X}\,\mathrm{I}_n)$ est triangulaire donc $Det(\mathrm{T}-\mathrm{X}\,\mathrm{I}_n)=\prod_{i=1}^{n}(t_{ii}-\mathrm{X})$.

⚠ Chaque valeur propre apparaît sur la diagonale autant de fois que son ordre de multiplicité.

Théorème : le polynôme caractéristique est un invariant de similitude.

Si A et A' sont semblables alors $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})=\chi_{\mathrm{A'}}(\mathrm{X})$

Démonstration : soit $\mathrm{P}\in\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ telle que $\mathrm{A}'=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{P}$ alors $\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{A}-\mathrm{X}\,Id_n)\mathrm{P}=\dots$

Définition de la trace d'une matrice carrée : soit $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$. La trace d'une matrice A notée $Tr(\mathrm{A})$ est le scalaire somme des ses éléments diagonaux.

$$\boxed{\text{Si } A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \text{ alors } Tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}}$$

<u>Propriétés de l'application « Trace »</u> : soit $A\in M_n(K)$, $B\in M_n(K)$ et $\lambda\in K$ alors :

Additivité : $\boxed{Tr(A+B)=Tr(A)+Tr(B)}$

Homogénéité : $\boxed{Tr(\lambda A)=\lambda Tr(A)}$

Trace d'un produit de matrices : $\boxed{Tr(AB)=Tr(BA)}$

Les 2 premières propriétés assurent que l'application « Trace » est une forme linéaire sur $M_n(K)$.
Démonstrations : ces propriétés découlent directement des opérations dans $M_n(K)$.
En particulier en notant $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ et $B=(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$,

On a $AB=\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ donc $Tr(AB)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i}$

Et $BA=\left(\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ donc $Tr(BA)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}b_{i,k}=Tr(AB)$

<u>Théorème</u> : la trace est un invariant de similitude.

$$\boxed{\text{Si A et A' sont semblables alors } Tr(A)=Tr(A')}$$

Démonstration : soit $P\in GL_n(K)$ telle que $A'=P^{-1}AP$ alors $Tr(P^{-1}AP)=\ldots$

<u>Définition des matrices carrées diagonalisables et trigonalisables</u> : Soit $A\in M_n(K)$

A est diagonalisable si et seulement elle est semblable à une matrice diagonale.
A est trigonalisable si et seulement elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Remarque : une matrice diagonalisable est trigonalisable.

Si $sp(A)=\{\lambda_1;\ldots;\lambda_k\}$ et si A est diagonalisable alors A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ddots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & 0 & \lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & 0 & \ddots & 0 & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_k & 0 & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ddots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_k\end{pmatrix}$
Chaque $\lambda_i$ étant présent $dim(E_{\lambda_i}(A))=m_{\lambda_i}(A)$ fois sur la diagonale.

Si $sp(A)=\{\lambda_1;\ldots;\lambda_k\}$ et si A est trigonalisable alors A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ddots & * & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & 0 & \lambda_1 & * & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & 0 & \ddots & * & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_k & * & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ddots & *\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_k\end{pmatrix}$
Chaque $\lambda_i$ étant présent $m_{\lambda_i}(A)$ fois sur la diagonale.

Démonstration : découle de la propriété d'invariance de $\chi_\lambda(A)$ par similitude.

<u>Diagonalisation des matrices carrées</u> : soit $A\in M_n(K)$.

La matrice carrée A est diagonalisable

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{\lambda\in sp(A)} dim(E_\lambda(A))=dim(E)$$

$$\Leftrightarrow$$

$\chi_A(X)$ est scindé sur K et $\forall\lambda\in sp(A)$, $m_\lambda(A)=dim(E_\lambda(A))$

<u>Méthode</u> : Diagonaliser une matrice $A\in M_n(K)$ consiste à déterminer une matrice diagonale $D\in M_n(K)$ et des matrices $P\in GL_n(K)$ et $P^{-1}$ telles que $A=PDP^{-1}$.
La matrice P est alors constituée, en colonne, de vecteurs propres de la matrice A.

<u>Justification utilisant les matrices de passage pour les matrices d'endomorphismes.</u>

Soit E un espace vectoriel de dimension $n$ .Les matrices A et D sont semblables si et seulement s'il existe $f\in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ et deux bases B et B' de E telles que $\mathrm{A}=Mat_{\mathrm{B}}(f)$ et $\mathrm{D}=Mat_{\mathrm{B}'}(f)$ .
Or la matrice D étant diagonale, les vecteurs de la base B' sont des vecteurs propres de l'endomorphisme $f$ : $e'_1$ ;...; $e'_n$
La relation $Mat_{\mathrm{B}}(f)=\mathrm{P}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}'}Mat_{\mathrm{B}'}(f)\mathrm{P}_{\mathrm{B}'}^{\mathrm{B}}$ correspond ainsi à $\mathrm{A}=\mathrm{PDP}^{-1}$ où la matrice P est donnée par $\mathrm{P}\stackrel{\text{def}}{=}\left([e'_1]_{\mathrm{B}};\ldots;[e'_n]_{\mathrm{B}}\right)$

Explication utilisant uniquement le calcul matriciel :

$$\mathrm{A}=\mathrm{PDP}^{-1} \iff \mathrm{AP}=\mathrm{PD} \iff \mathrm{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1 p_{1,1} & \ldots & \lambda_k p_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_1 p_{n,1} & \ldots & \lambda_k p_{n,n}\end{pmatrix} \text{ ainsi } \mathrm{A}\begin{pmatrix}p_{1,1}\\ \vdots\\ p_{n,1}\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}p_{1,1}\\ \vdots\\ p_{n,1}\end{pmatrix} ;\ldots; \mathrm{A}\begin{pmatrix}p_{n,1}\\ \vdots\\ p_{n,n}\end{pmatrix}=\lambda_k\begin{pmatrix}p_{n,1}\\ \vdots\\ p_{n,n}\end{pmatrix}$$

Rappel : la matrice de passage de la base B à la base B' vérifie la relation : pour tout $v\in \mathrm{E}$ , $[v]_{\mathrm{B}}=\mathrm{P}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}'}[v]_{\mathrm{B}'}$
Ainsi, pour $\mathrm{V}\in \mathrm{M}_{n;1}(\mathrm{K})$ et $\mathrm{V}'\in \mathrm{M}_{n;1}(\mathrm{K})$ , on a l'équivalence : $\boxed{\mathrm{V}=\mathrm{PV}'\Leftrightarrow \mathrm{P}^{-1}\mathrm{V}=\mathrm{V}'}$

En notant $\mathrm{P}\stackrel{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}p_{1,1} & \cdots & p_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n}\end{pmatrix}$ ; $\mathrm{V}\stackrel{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $\mathrm{V}'\stackrel{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix}$, déterminer $\mathrm{P}^{-1}$ revient à résoudre le système linéaire d'inconnues $x'_1,\ldots,x'_n$ en fonction des paramètres $x_1$ ,... $x_n$ : $\begin{cases}p_{1,1}x'_1+\ldots+p_{1,n}x'_n=x_1\\ \vdots\\ p_{n,1}x'_1+\ldots+p_{n,n}x'_n=x_n\end{cases}$

Trigonalisation des matrices carrées : soit $\mathrm{A}\in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ .

$$\boxed{\text{La matrice A est trigonalisable si et seulement si } \chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) \text{ est scindé dans K.}}$$

Corollaire du théorème de trigonalisation : si A est trigonalisable alors la trace de A est égale à la somme de ses valeurs propres comptées autant de fois que leur multiplicité : $\boxed{Tr(\mathrm{A})=\sum_{\lambda\in sp(\mathrm{A})}\lambda\times m_{\lambda}(\mathrm{A})}$

Remarque : ce résultat est valide pour toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ car...
Démonstration : soit A semblable à A' triangulaire alors...

⚠ Si A n'est pas trigonalisable. Exemple, pour $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ ...

Corollaire sur la trace et le polynôme caractéristique : $\mathrm{A}\in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$

$$\boxed{\chi_A(\mathrm{X})=(-1)^n\mathrm{X}^n+(-1)^{n-1}Tr(\mathrm{A})\mathrm{X}^{n-1}+\ldots+Det(A)}$$

Démonstration : si $\mathrm{A}\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ le résultat est immédiat en trigonalisant A.
Si $\mathrm{A}\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ , il suffit de considérer que $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})\subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (clôture algébrique) et on a $Tr(\mathrm{A})\in\mathbb{R}$ .

Application au calcul de $\mathrm{A}^q$ :
Si A est diagonalisable, alors en notant D la matrice diagonale telle que $\mathrm{D}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{P}$ , on a : $\mathrm{A}=\mathrm{PDP}^{-1}$ et $\mathrm{A}^q=\mathrm{PD}^q\mathrm{P}^{-1}$

Le calcul de $\mathrm{D}^q$ est alors donné par : $$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ddots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & 0 & \lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & 0 & \ddots & 0 & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_k & 0 & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ddots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_k\end{pmatrix}^q=\begin{pmatrix}\lambda_1^q & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ddots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & 0 & \lambda_1^q & 0 & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & 0 & \ddots & 0 & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_k^q & 0 & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ddots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_k^q\end{pmatrix}$$

Si A est trigonalisable, alors en notant T la matrice triangulaire supérieure telle que $\mathrm{T}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ , on a : $\boxed{\mathrm{A}^q=\mathrm{PT}^q\mathrm{P}^{-1}}$
On démontre par récurrence que $\mathrm{T}^q$ est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est constituée des $\left((\lambda_i)^q\right)$ .

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \ddots & * & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \lambda_1 & * & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \ddots & * & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_k & * & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \ddots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}^q = \begin{pmatrix} \lambda_1^q & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \ddots & * & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \lambda_1^q & * & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \ddots & * & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_k^q & * & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \ddots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_k^q \end{pmatrix}$$

En écrivant T=D+N avec D diagonale et N nilpotente d'indice $k$ $\left(N^k=0_{M_n}(K)\right)$, le calcul complet de $\mathrm{T}^q$ peut alors être donné , <u>si les matrices D et N commutent</u>, par la formule du binôme de Newton : $\boxed{\mathrm{T}^q=(\mathrm{N}+\mathrm{D})^q=\sum_{i=0}^{min(q;k-1)}\binom{q}{i}\mathrm{N}^i\,\mathrm{D}^{q-i}}$

⚠ Une matrice diagonale et une matrice triangulaire supérieure nilpotente ne commutent pas toujours.

Exemple : $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$

Remarque : une autre méthode classique permet de calculer $\mathrm{A}^q$ lorsqu'un polynôme annulateur de A est connu.

Soit $k+1$ scalaires $\alpha_0$ ,..., $\alpha_k$ tels que $\alpha_k\mathrm{A}^k+\ldots+\alpha_1\mathrm{A}+\alpha_0\mathrm{I}_n=0_{\mathrm{M}_n(\mathrm{K})}$.

Alors en notant $\beta_{k-1,q}\mathrm{X}^{k-1}+\ldots+\beta_{1,q}\mathrm{X}+\beta_{0,q}$ le reste dans la division euclidienne du polynôme $\mathrm{X}^q$ par le polynôme $\alpha_k\mathrm{X}^k+\ldots+\alpha_1\mathrm{X}+\alpha_0$, on obtient $\mathrm{A}^q=\beta_{k-1,q}\mathrm{A}^{k-1}+\ldots+\beta_{1,q}\mathrm{A}+\beta_{0,q}\mathrm{I}_n$

<u>Application aux suites numériques satisfaisant une relation de récurrence linéaire à coefficients constant</u> :
Soit $a\neq 0$, $b$, $c$, et $d$ quatre réels. L'ensemble suites numériques $(u_n)$ telles que $\forall n\in\mathbb{N}$, $a\,u_{n+2}+b\,u_{n+1}+c\,u_n=d$ sont les suites sommes $(v_n+w_n)$ :

où $(v_n)$ est UNE suite solution particulière

et LES suites $(w_n)$ sont les suites telles que $\forall n\in\mathbb{N}$, $a\,w_{n+2}+b\,w_{n+1}+c\,w_n=d$

Démonstration : L'objectif est de déterminer l'expression du terme général $u_n$ en fonction de $n$.

Soit E le $\mathbb{C}$ _espace vectoriel des suites numériques et $\phi\in\mathrm{L}(\mathrm{E})$ telle que $\phi((u_n))=(v_n)$ telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=a\,u_{n+2}+b\,u_{n+1}+c\,u_n$$

Exemple : soit $a=1$ ; $b=2$ $c=3$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=2^n$ alors $\phi((u_n))$ est définie par : ...

Soit $(\mathrm{D}_n)$ la suite constante telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{D}_n=d$, il s'agit de résoudre l'équation linéaire : $\phi((u_n))=(\mathrm{D}_n)$.

<u>Recherche d'une suite solution particulière du type polynomial</u> : Soient $a\neq 0$, $b$, $c$ et $d$ quatre réels.
Il existe un polynôme $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\mathrm{P}(n)$ et $a\,u_{n+2}+b\,u_{n+1}+c\,u_n=d$

Démonstration :

suite constante : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=k$ ...

suite arithmétique : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=k\,n$ ...

suite proportionnelle aux carrés des entiers : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=kn^2$ ...

Détermination des suites de Ker $\phi$ : soit $(w_n)$ une suite numérique

$$(w_n)\in\mathrm{Ker}\,\phi \iff \forall n\in\mathbb{N},\ a\,w_{n+2}+b\,w_{n+1}+c\,w_n=0$$
$$\iff \forall n\in\mathbb{N},\ w_{n+2}=-\frac{b}{a}w_{n+1}-\frac{c}{a}w_n$$

La donnée des scalaires $w_0$ et $w_1$ détermine entièrement la suite $(w_n)$ donc $dim(\mathrm{Ker}\,\phi)=2$. Plus précisément, soit $(w'_n)$ et $(w''_n)$ les suites définies par $\begin{cases} w'_0=1\\ w'_1=0\\ \forall n\in\mathbb{N}, w'_{n+2}=-\frac{b}{a}w'_{n+1}-\frac{c}{a}w'_n\end{cases}$ et $\begin{cases} w''_0=0\\ w''_1=1\\ \forall n\in\mathbb{N}, w''_{n+2}=-\frac{b}{a}w''_{n+1}-\frac{c}{a}w''_n\end{cases}$

Les suites $(w'_n)$ et $(w''_n)$ sont libres dans E d'après le choix des 2 premiers termes.

De plus la famille $((w'_n),(w''_n))$ est génératrice de $\mathrm{Ker}\,\phi$ car $(w_n)\in\mathrm{Ker}\,\phi \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ w_n=w_0\times w'_n+w_1\times w''_n$

Donc la famille $((w'_n),(w''_n))$ est une base de $\mathrm{Ker}\,\phi$, ce qui ne donne pas de forme explicite des termes des suites de $\mathrm{Ker}\,\phi$. La réduction des matrices de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ permet de déterminer la forme des termes de ces suites.

Expression des termes d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants :

Soient $a \neq 0$ , $b$ , $c$ trois réels. On considère les suites numériques telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$ , $a\,u_{n+2}+b\,u_{n+1}+c\,u_n=0$ .

Soit l'équation caractéristique (E): $a\,r^2+b\,r+c=0$ .

| Si (E) admet 2 racines réelles distinctes $r_1$ et $r_2$ alors $\exists(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$ , $u_n=\alpha(r_1)^n+\beta(r_2)^n$ | Si (E) admet une seule racine réelle $r$ alors $\exists(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$ , $u_n=\alpha r^n+\beta n r^{n-1}$ C'est-à-dire : $u_n=(\alpha+n\beta')r^n$ | Si (E) admet 2 racines complexes conjuguées $r\,e^{i\theta}$ et $r\,e^{-i\theta}$ alors $\exists(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$ , $u_n=\alpha r^n\cos(n\theta)+\beta r^n\sin(n\theta)$ |
|---|---|---|

$$(w_n)\in\text{Ker}\,\phi \iff \forall n\in\mathbb{N},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_n \\ w_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} w_{n+1} \\ w_{n+2}\end{pmatrix}$$

en notant $W_n=\begin{pmatrix} w_n \\ w_{n+1}\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a}\end{pmatrix}$ on a : $\forall n\in\mathbb{N}$ , $W_{n+1}=A\,W_n$ donc $\forall n\in\mathbb{N}$ , $W_n=A^n W_0$ .

$P_A(X)=\ det(A-X\,I_2)=\begin{vmatrix} -X & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a}-X\end{vmatrix}=X\left(X+\frac{b}{a}\right)+\frac{c}{a}=\frac{1}{a}(a\,X^2+b\,X+c)$ . Soit le discriminant : $\Delta=b^2-4ac$

- Si $\Delta>0$ alors la matrice A admet deux valeurs propres réelles distinctes $r_1$ et $r_2$ , donc A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$

  donc il existe $P\in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A=P\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2\end{pmatrix}P^{-1}$

  ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$ , $A^n=P\begin{pmatrix} (r_1)^n & 0 \\ 0 & (r_2)^n\end{pmatrix}P^{-1}$

$$(w_n)\in\text{Ker}\,\phi \iff \forall n\in\mathbb{N}, W_n=P\begin{pmatrix} (r_1)^n & 0 \\ 0 & (r_2)^n\end{pmatrix}P^{-1}W_0$$

$$\Rightarrow \exists(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2 : \forall n\in\mathbb{N},\ w_n=\alpha(r_1)^n+\beta(r_2)^n$$

Donc $\text{Ker}\,\phi\subset vect\left(((r_1)^n)_{n\in\mathbb{N}},((r_2)^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$

De plus $dim(\text{Ker}\,\phi)=2$ .

Conclusion : si $\Delta>0$ alors $\text{Ker}\,\phi=vect\left(((r_1)^n)_{n\in\mathbb{N}},((r_2)^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ .

- Si $\Delta=0$ alors la matrice A admet une seule valeur propre $r$ d'ordre de multiplicité 2. De plus A n'est pas diagonalisable, car si elle l'était elle serait semblable à une matrice scalaire et serait donc diagonale. La matrice A est trigonalisable : donc il existe $P\in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A=P\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r\end{pmatrix}P^{-1}$

Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}$ , $W_n=P\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r\end{pmatrix}^n P^{-1}$

$\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r\end{pmatrix}$ (une matrice scalaire commute avec toute matrice), ainsi, en vertu de la formule du binôme de Newton :

$$\forall n\geqslant 1,\ \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r\end{pmatrix}^n=\sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k}\begin{pmatrix} r^{n-k} & 0 \\ 0 & r^{n-k}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix} r^n & 0 \\ 0 & r^n\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} r^{n-1} & 0 \\ 0 & r^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r^n & n r^{n-1} \\ 0 & r^n\end{pmatrix}$$

$$(w_n)\in\text{Ker}\,\phi \iff \forall n\in\mathbb{N}, W_n=P\begin{pmatrix} r^n & n r^{n-1} \\ 0 & r^n\end{pmatrix}P^{-1}W_0$$

$$\Rightarrow \exists(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2 \text{ tels que } \forall n\in\mathbb{N},\ w_n=\alpha r^n+\beta n r^{n-1}$$

Donc $\text{Ker}\,\phi\subset vect\left((r^n)_{n\in\mathbb{N}},(n r^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}\right)$

De plus $dim(\text{Ker}\,\phi)=2$ ,

Conclusion : si $\Delta=0$ alors $\text{Ker}\,\phi=vect\left((r^n)_{n\in\mathbb{N}},(n r^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}\right)$ .

- Si $\Delta<0$ alors le polynôme caractéristique de la matrice A n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc la matrice A n'est pas trigonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ . En revanche, la matrice A est admet deux valeurs propres complexes distinctes $r\,e^{i\theta}$ et

$r\,\mathrm{e}^{-i\theta}$ (conjuguées car le polynôme caractéristique est à coefficients réels) elles est donc diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ : il existe $\mathrm{P}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{A}=\mathrm{P}\begin{pmatrix} r\,\mathrm{e}^{i\theta} & 0 \\ 0 & r\,\mathrm{e}^{-i\theta}\end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$

Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{A}^n=\mathrm{P}\begin{pmatrix} r^n\,\mathrm{e}^{in\theta} & 0 \\ 0 & r^n\,\mathrm{e}^{-in\theta}\end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$

$(w_n)\in\mathrm{Ker}\,\phi \quad \Leftrightarrow \quad \forall n\in\mathbb{N}, \mathrm{W}_n=\mathrm{P}\begin{pmatrix} r^n\,\mathrm{e}^{in\theta} & 0 \\ 0 & r^n\,\mathrm{e}^{-in\theta}\end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{W}_0$

$\Rightarrow \quad \exists(\alpha;\beta)\in\mathbb{C}^2 : \forall n\in\mathbb{N}$, $w_n=\alpha r^n\mathrm{e}^{in\theta}+\beta r^n\mathrm{e}^{-in\theta}=2(\alpha+\beta)r^n\cos(n\theta)+2i(\alpha-\beta)r^n\sin(n\theta)$

Or $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_n\in\mathbb{R}$ donc $w_n=2\,\Re\mathrm{e}(\alpha+\beta)r^n\cos(n\theta)-2\,\Im\mathrm{m}(\alpha-\beta)r^n\sin(n\theta)$

Donc $\mathrm{Ker}\,\phi\subset vect\left((r^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}},(r^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}\right)$

De plus $dim(\mathrm{Ker}\,\phi)=2$ .

Conclusion : si $\Delta>0$ alors $\mathrm{Ker}\,\phi=vect\left((r^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}},(r^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}\right)$ .

Extension de la méthode : soit $k$ scalaires $a_0$ , …., $a_{k-1}$ . Pour déterminer l'ensemble des suites $(u_n)$ vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre $k$ : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_0u_n+\ldots+a_{k-1}u_{n+k-1}=u_{n+k}$

On peut utiliser la notation matricielle : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_0 & \ldots & \ldots & \ldots & a_{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n+k-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n+k}\end{pmatrix}$

En posant $U_n\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n+k-1}\end{pmatrix}$ et $A\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_0 & \ldots & \ldots & \ldots & a_{k-1}\end{pmatrix}$ la relation de récurrence devient $\mathrm{A}\times\mathrm{U}_n=\mathrm{U}_{n+1}$

On obtient donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n=A^nU_0$ , il reste donc à déterminer $\mathrm{A}^n$ ...