Opérations sur les relations de comparaison locales.

Soit $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$, et I un intervalle non réduit à un point tel que: $a\in\mathrm{I}$ ou $a=\sup\mathrm{I}$ ou $a=\inf\mathrm{I}$.

On considère 3 fonctions f , g et φ définies sur l'intervalle I et telles que $\forall x\in\mathrm{I}$, $f(x)=\varphi(x)\times g(x)$, ainsi : $\begin{cases}\text{si } g(x)\neq 0 \text{ alors } \varphi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}\\ \text{si } g(x)=0 \text{ alors } f(x)=0\end{cases}$

Dans la pratique, si $g(x)$ ne s'annule pas sur $\mathrm{I}\setminus\{a\}$ alors la fonction φ est définie sur $\mathrm{I}\setminus\{a\}$ par f et g et $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ peut être envisagée sereinement.

	Domination au voisinage de a	Équivalence au voisinage de a	Négligeable au voisinage de a
Définitions	$f(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{O}}(g(x)) \Leftrightarrow \varphi$ est bornée au voisinage de a $f(x)$ est dominé par $g(x)$ au voisinage de a $\exists \mathrm{M}>0$, $\exists$ J voisinage de a : $\forall x\in\mathrm{J}$, $\lvert\varphi(x)\rvert\leqslant \mathrm{M}$ donc $\forall x\in\mathrm{J}$, $\lvert f(x)\rvert\leqslant \mathrm{M}\lvert g(x)\rvert$	$f(x)\underset{x\to a}{\sim}g(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=1$ $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ au voisinage de a $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ J voisinage de a : $\forall x\in\mathrm{J}$, $\lvert\varphi(x)-1\rvert\leqslant\varepsilon$ donc $\forall x\in\mathrm{J}$; $\lvert f(x)-g(x)\rvert\leqslant\varepsilon\lvert g(x)\rvert$	$f(x)=\underset{x\to a}{o}(g(x)) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ $f(x)$ est négligeable face à $g(x)$ au voisinage de a $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ J voisinage de a : $\forall x\in\mathrm{J}$, $\lvert\varphi(x)\rvert\leqslant\varepsilon$, donc $\forall x\in\mathrm{J}$; $\lvert f(x)\rvert\leqslant\varepsilon\lvert g(x)\rvert$
Conséquence sur les limites	$\left.\begin{array}{r} f(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{O}}(g(x))\\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=0$	$\left.\begin{array}{r} f(x)\underset{x\to a}{\sim}g(x)\\ g \text{ admet une limite en } a\\ \text{(finie ou non)}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\left.\begin{array}{r} f(x)=\underset{x\to a}{o}(g(x))\\ g \text{ est bornée au voisinage de } a\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=0$
Liens	$f(x)=\underset{x\to a}{o}(g(x))\Rightarrow f(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{O}}(g(x))$	$f(x)\underset{x\to a}{\sim}g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=\underset{x\to a}{o}(g(x))$	$\left.\begin{array}{r} f_1(x)=\underset{x\to a}{o}(g_1(x))\\ f_2(x)=\underset{x\to a}{O}(g_2(x))\end{array}\right\}\Rightarrow f_1(x)\times f_2(x)=\underset{x\to a}{o}(g_1(x)\times g_2(x))$
Transitivité	$\left.\begin{array}{r} f(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{O}}(g(x))\\ g(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{O}}(h(x))\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{O}}(h(x))$	$\left.\begin{array}{r} f(x)\underset{x\to a}{\sim}g(x)\\ g(x)\underset{x\to a}{\sim}h(x)\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)\underset{x\to a}{\sim}h(x)$	$\left.\begin{array}{r} f(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))\\ g(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{o}}(h(x))\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{o}}(h(x))$
Combinaisons linéaires	$f(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{O}}(g(x))\Rightarrow\lambda f(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{O}}(g(x))$ $\left.\begin{array}{r} f_1(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{O}}(g(x))\\ f_2(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{O}}(g(x))\end{array}\right\}\Rightarrow f_1(x)+f_2(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{O}}(g(x))$	$f(x)\underset{x\to a}{\sim}g(x)\Rightarrow\lambda f(x)\underset{x\to a}{\sim}\lambda g(x)$ ⚠ $\left.\begin{array}{r} f_1(x)\underset{x\to a}{\sim}g_1(x)\\ f_2(x)\underset{x\to a}{\sim}g_2(x)\end{array}\right\}$ n'impl. pas $f_1(x)+f_2(x)\underset{x\to a}{\sim}g_1(x)+g_2(x)$	$f(x)=\underset{x\to a}{o}(g(x))\Rightarrow\lambda f(x)=\underset{x\to a}{o}(g(x))$ $\left.\begin{array}{r} f_1(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))\\ f_2(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))\end{array}\right\}\Rightarrow f_1(x)+f_2(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))$
Produits membre à membre	$f(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{O}}(g(x))\Rightarrow h(x)\times f(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{O}}(h(x)\times g(x))$ $\left.\begin{array}{r} f_1(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{O}}(g_1(x))\\ f_2(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{O}}(g_2(x))\end{array}\right\}\Rightarrow f_1(x)\times f_2(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{O}}(g_1(x)\times g_2(x))$	$f(x)\underset{x\to a}{\sim}g(x)\Rightarrow h(x)\times f(x)\underset{x\to a}{\sim}h(x)\times g(x)$ $\left.\begin{array}{r} f_1(x)\underset{x\to a}{\sim}g_1(x)\\ f_2(x)\underset{x\to a}{\sim}g_2(x)\end{array}\right\}\Rightarrow f_1(x)\times f_2(x)\underset{x\to a}{\sim}g_1(x)\times g_2(x)$	$f(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))\Rightarrow h(x)\times f(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{o}}(h(x)\times g(x))$ $\left.\begin{array}{r} f_1(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g_1(x))\\ f_2(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g_2(x))\end{array}\right\}\Rightarrow f_1(x)\times f_2(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g_1(x)\times g_2(x))$
Puissances	Si $(f(x))^\alpha$ et $(g(x))^\alpha$ existent pour $x\in\mathrm{I}\setminus\{a\}$ alors : $\forall\alpha\in\mathbb{R}^+$, $f(x)=\underset{x\to a}{O}g(x)\Rightarrow(f(x))^\alpha=\underset{x\to a}{O}((g(x))^\alpha)$	Si $(f(x))^\alpha$ et $(g(x))^\alpha$ existent pour $x\in\mathrm{I}\setminus\{a\}$ alors : $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $f(x)\underset{x\to a}{\sim}g(x)\Rightarrow(f(x))^\alpha\underset{x\to a}{\sim}(g(x))^\alpha$	Si $(f(x))^\alpha$ et $(g(x))^\alpha$ existent pour $x\in\mathrm{I}\setminus\{a\}$ alors : $\forall\alpha\in\mathbb{R}^+$, $f(x)=\underset{x\to a}{o}g(x)\Rightarrow(f(x))^\alpha=\underset{x\to a}{o}((g(x))^\alpha)$
Composition à droite	Si $f(h(x))$ et $g(h(x))$ existent pour $x\in\mathrm{I}\setminus\{a\}$ $\left.\begin{array}{r} f(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{O}}(g(x))\\ \lim\limits_{x\to b} h(x)=a\end{array}\right\}\Rightarrow f(h(x))=\underset{x\to b}{\mathrm{O}}(g(h(x)))$	Si $f(h(x))$ et $g(h(x))$ existent pour $x\in\mathrm{I}\setminus\{a\}$ $\left.\begin{array}{r} f(x)\underset{x\to a}{\sim}g(x)\\ \lim\limits_{x\to b} h(x)=a\end{array}\right\}\Rightarrow f(h(x))\underset{x\to b}{\sim}g(h(x))$	Si $f(h(x))$ et $g(h(x))$ existent pour $x\in\mathrm{I}\setminus\{a\}$ $\left.\begin{array}{r} f(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))\\ \lim\limits_{x\to b} h(x)=a\end{array}\right\}\Rightarrow f(h(x))=\underset{x\to b}{\mathrm{o}}(g(h(x)))$
⚠	$f(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{O}}(g(x))$ n'implique pas $h(f(x))=\underset{x\to a}{\mathrm{O}}(h(g(x)))$	$f(x)\underset{x\to a}{\sim}g(x)$ n'implique pas $h(f(x))\underset{x\to a}{\sim}h(g(x))$	$f(x)=\underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))$ n'implique pas $h(f(x))=\underset{x\to a}{\mathrm{o}}(h(g(x)))$