

Opérations et applications sur les matrices carrées

Matrices inversibles : $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que : $AB=I_n \Leftrightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que : $BA=I_n \Leftrightarrow \text{Ker } A = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \Leftrightarrow 0 \notin sp(A) \Leftrightarrow rg(A) = n$

	Additivité	Homogénéité	Produit	Puissances, $k \in \mathbb{N}$	Inverse, $A \in GL_n(\mathbb{K})$	Transposée
Puissance $q \in \mathbb{N} : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ $A \mapsto A^q$	Si $AB=BA$ alors $(A+B)^q = \sum_{i=0}^q \binom{q}{i} A^i B^{q-i}$	$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda A)^q = \lambda^q A^q$	Si $AB=BA$ alors $(AB)^q = A^q B^q$	$(A^k)^q = A^{kq}$	$(A^{-1})^q = (A^q)^{-1}$	$({}^t A)^q = {}^t(A^q)$
Inverse : $\cdot^{-1} : GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow GL_n(\mathbb{K})$ $A \mapsto A^{-1}$ tq $AA^{-1}=I_n$	En général $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$	$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$	$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$	$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$	$(A^{-1})^{-1} = A$	$({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
Transposée : ${}^t \cdot : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ $(a_{ij}) \mapsto (a_{ji})$	${}^t(A+B) = {}^t A + {}^t B$	$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^t A$	${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$	${}^t(A^k) = ({}^t A)^k$	${}^t(A^{-1}) = ({}^t A)^{-1}$	${}^t({}^t A) = A$
Trace : $Tr : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ $(a_{ij}) \mapsto \sum_{i=1}^n a_{ii}$	$Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$	$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$	$Tr(AB) = Tr(BA)$ En général, $Tr(AB) \neq Tr(A) \times Tr(B)$	Si A est trigonalisable alors $Tr(A^k) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i)^k$	Si A est trigonalisable alors $Tr(A^{-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}$	$Tr({}^t A) = Tr(A)$
Déterminant : $\det : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ unique forme n -linéaire alternée tq : $\det(I_n) = 1$	En général $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$	$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$	$\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$	$\det(A^k) = (\det(A))^k$	$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$	$\det({}^t A) = \det(A)$
Rang : $rg : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow [0; n]$ $A \mapsto \dim(\text{vect}\{(a_{i1})_{i \in [1; n]}; \dots; (a_{in})_{i \in [1; n]}\})$	$rg(A+B) \leq rg(A) + rg(B)$	si $\lambda \neq 0$, $rg(\lambda A) = rg(A)$	$rg(AB) \leq \min(rg(A); rg(B))$ si $B \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $rg(AB) = rg(A)$	$rg(A^k) \leq rg(A)$	$rg(A) = rg(A^{-1}) = n$	$rg({}^t A) = rg(A)$
Norme eucl. can. : $\ \cdot\ : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ $A \mapsto \sqrt{Tr({}^t A \times A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j})^2}$	$\ A+B\ \leq \ A\ + \ B\ $	$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\ \lambda A\ = \lambda \times \ A\ $	Hors programme : $\ AB\ \leq \ A\ \times \ B\ $	Hors programme : $\ A^k\ \leq (\ A\)^k$	Hors programme : $\ A^{-1}\ \geq \frac{1}{\ A\ }$	$\ {}^t A\ = \ A\ $

Matrices semblables : $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $B \in M_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1} A P$

Trace : $Tr(A) = Tr(B)$
 Déterminant : $\det(A) = \det(B)$
 Polynôme caractéristique : $\chi_A(X) = \chi_B(X)$ conséquence sur le spectre : $sp(A) = sp(B)$
 Rang : $rg(A) = rg(B)$

Invariants

Puissances : $B^k = P^{-1} A^k P$
 Inverse : $B^{-1} = P^{-1} A^{-1} P$
 Transposée : en général ${}^t B \neq P^{-1} {}^t A P$
 Norme euclidienne canonique : en général $\|A\| \neq \|B\|$

Non invariants

Espace euclidien \mathbb{R}^n

Matrices réelles orthogonales	Matrices réelles symétriques
Définition : $A \in O(n) \Leftrightarrow {}^t A = A^{-1}$ Propriétés : $\det(A) = \pm 1$; $sp(A) \subset \{-1; 1\}$ Changement de base : Si $A \in O(n)$ alors $\forall P \in O(n)$, ${}^t P A P \in O(n)$ A connaître : classification de $O(2)$ et $O(3)$... La matrice d'une projection orthogonale dans une base orthonormale n'est pas orthogonale !	Définition : $A \in S(n) \Leftrightarrow {}^t A = A$ Changement de base : Si $A \in S(n)$ alors $\forall P \in O(n)$, ${}^t P A P \in S(n)$ Diagonalisation : Si $A \in S(n)$ alors $\exists P \in O(n)$ telle que ${}^t P A P$ soit diagonale. Un endomorphisme ayant une matrice symétrique dans une base orthonormale n'est pas nécessairement une symétrie !

Si $A \in O(n) \cap S(n)$ alors $A^2 = I_n$ c'est-à-dire A est la matrice d'une symétrie.