Opérations sur les développements limités en zéro.

<u>Définition</u> de la notation de Landau o :

$$\text{soit } n\in\mathbb{N},\ f(x)=o(x^n)\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=0$$

Ici le symbole « = » est utilisé abusivement. En particulier il n'y a plus transitivité : $\left.\begin{array}{l} f(x)=o(x^n)\\ g(x)=o(x^n)\end{array}\right\}$ n'implique pas $f(x)=g(x)$.

<u>Troncature</u> : si $p>n$ alors $x^p=o(x^n)$

<u>Addition</u> : $o(x^p)+o(x^n)=o(x^{min(p;n)})$

<u>Multiplication</u> : soit $k\in\mathbb{R}$, alors $k\times o(x^n)=o(x^n)$

$$x^p\times o(x^n)=o(x^{n+p})$$

$$o(x^p)\times o(x^n)=o(x^{n+p})$$

<u>Composition</u> : $(o(x^n))^p=o(x^{np})$

Si $p>1$ et $k\neq 0$ alors $o(k\times x^p+o(x^{p+1}))=o(x^p)$

$o(1+x)$ n'a pas de sens pour un développement limité en 0.

<u>Division</u> : si $\alpha_p\neq 0$ alors

$$\frac{P(x)}{\alpha_p x^p+\alpha_{p+1}x^{p+1}+\ldots+o(x^n)}=\frac{P(x)}{\alpha_p x^p}\times\frac{1}{1+\underbrace{\frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p}x+\ldots+o(x^{n-p})}_{X}}$$

Il suffit d'utiliser la composition avec le développement limité de $\dfrac{1}{1+X}$ en 0.

<u>Intégration terme à terme</u> : $\int_0^x o(t^n)\,\mathrm{d}t=o(x^{n+1})$

$x\mapsto o(x^n)$ n'est pas nécessairement une fonction dérivable en 0.

<u>Développement limité en un réel a</u>: on pose $x=a+\varepsilon$ et on utilise $o((x-a)^n)$.

<u>Développement asymptotique</u> : on pose $\dfrac{1}{x}=\varepsilon$ et on utilise $o\left(\left(\dfrac{1}{x}\right)^n\right)$.

Opérations sur les développements limités en zéro.

Définition de la notation de Landau o :

$$\text{soit } n\in\mathbb{N},\ f(x)=o(x^n)\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=0$$

Ici le symbole « = » est utilisé abusivement. En particulier il n'y a plus transitivité : $\left.\begin{array}{l} f(x)=o(x^n)\\ g(x)=o(x^n)\end{array}\right\}$ n'implique pas $f(x)=g(x)$.

Troncature : si $p>n$ alors $x^p=o(x^n)$

Addition : $o(x^p)+o(x^n)=o(x^{min(p;n)})$

Multiplication : soit $k\in\mathbb{R}$, alors $k\times o(x^n)=o(x^n)$

$$x^p\times o(x^n)=o(x^{n+p})$$

$$o(x^p)\times o(x^n)=o(x^{n+p})$$

Composition : $(o(x^n))^p=o(x^{np})$

Si $p>1$ et $k\neq 0$ alors $o(k\times x^p+o(x^{p+1}))=o(x^p)$

$o(1+x)$ n'a pas de sens pour un développement limité en 0.

Division : si $\alpha_p\neq 0$ alors

$$\frac{P(x)}{\alpha_p x^p+\alpha_{p+1}x^{p+1}+\ldots+o(x^n)}=\frac{P(x)}{\alpha_p x^p}\times\frac{1}{1+\underbrace{\frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p}x+\ldots+o(x^{n-p})}_{X}}$$

Il suffit d'utiliser la composition avec le développement limité de $\dfrac{1}{1+X}$ en 0.

Intégration terme à terme : $\int_0^x o(t^n)\,\mathrm{d}t=o(x^{n+1})$

$x\mapsto o(x^n)$ n'est pas nécessairement une fonction dérivable en 0.

Développement limité en un réel a: on pose $x=a+\varepsilon$ et on utilise $o((x-a)^n)$.

Développement asymptotique : on pose $\dfrac{1}{x}=\varepsilon$ et on utilise $o\left(\left(\dfrac{1}{x}\right)^n\right)$.

pycreach.free.fr