Espaces vectoriels de dimension finie et matrices

I. Matrice d'un endomorphisme dans une base donnée

K_espace vectoriel E de dimension n	Notation matricielle	Calculs matriciels	Espace euclidien $(E;\langle\cdot\vert\cdot\rangle)$
Soit $B=(\vec{e}_1;\dots;\vec{e}_n)$ une base de E et $\vec{v}$ un vecteur de E. Si $\vec{v}=x_1\vec{e}_1+\dots+x_n\vec{e}_n$ avec $(x_1;\dots;x_n)\in K^n$ alors : $\vec{v}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}_B$	$\boxed{[\vec{v}]_B\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in M_{n,1}(K)}$ Exemple : $[\vec{e}_1]_B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$;…; $[\vec{e}_n]_B=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$	$\boxed{[\vec{v}+\vec{v}']_B=[\vec{v}]_B+[\vec{v}']_B}$ $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$, $\boxed{[\lambda\vec{v}]_B=\lambda[\vec{v}]_B}$ Exemple : $[\vec{v}]_B=x_1[\vec{e}_1]_B+\dots+x_n[\vec{e}_n]_B$	$B=(\vec{e}_1;\dots;\vec{e}_n)$ une base <u>orthonormale</u> : $\boxed{[\vec{v}]_B=\begin{pmatrix}\langle\vec{v}\vert\vec{e}_1\rangle\\ \vdots\\ \langle\vec{v}\vert\vec{e}_n\rangle\end{pmatrix}}$ $\boxed{\langle\vec{v}\vert\vec{v}'\rangle={}^t([\vec{v}]_B)\times[\vec{v}']_B}$
Soit $f\in L(E)$, $f(\vec{v})=x_1f(\vec{e}_1)+\dots+x_nf(\vec{e}_n)$	$\boxed{Mat_B(f)\overset{\text{def}}{=}([f(\vec{e}_1)]_B;\dots;[f(\vec{e}_n)]_B)\in M_n(K)}$	$[f(\vec{v})]_B=x_1[f(\vec{e}_1)]_B+\dots+x_n[f(\vec{e}_n)]_B$ $[f(\vec{v})]_B=Mat_B(f)\times\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ $\boxed{[f(\vec{v})]_B=Mat_B(f)\times[\vec{v}]_B}$ Exemple : $[f(\vec{e}_1)]_B=Mat_B(f)\times\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$	$B=(\vec{e}_1;\dots;\vec{e}_n)$ une base <u>orthonormale</u> : $\boxed{Mat_B(f)=\begin{pmatrix}\langle f(\vec{e}_1)\vert\vec{e}_1\rangle & \dots & \langle f(\vec{e}_n)\vert\vec{e}_1\rangle\\ \vdots & & \vdots\\ \langle f(\vec{e}_1)\vert\vec{e}_n\rangle & \dots & \langle f(\vec{e}_n)\vert\vec{e}_n\rangle\end{pmatrix}}$ $f\in S(E)\ \Leftrightarrow\ Mat_B(f)\in S(n)$ $f\in O(E)\ \Leftrightarrow\ Mat_B(f)\in O(n)$

II. Matrice de passage

Soient $B=(\vec{e}_1;\dots;\vec{e}_n)$ et $B'=(\vec{e'}_1;\dots;\vec{e'}_n)$ deux bases de E. Soit un vecteur $\vec{v}$ de E : $\vec{v}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}_B$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix}_{B'}$ $\vec{v}=x_1\vec{e}_1+\dots+x_n\vec{e}_n=x'_1\vec{e'}_1+\dots+x'_n\vec{e'}_n$	$\boxed{P_B^{B'}\overset{\text{def}}{=}([\vec{e'}_1]_B;\dots;[\vec{e'}_n]_B)\in M_n(K)}$ $\boxed{(P_B^{B'})^{-1}=P_{B'}^{B}}$	$[\vec{v}]_B=x'_1[\vec{e'}_1]_B+\dots+x'_n[\vec{e'}_n]_B$ $\boxed{[\vec{v}]_B=P_B^{B'}\times[\vec{v}]_{B'}}$ $\boxed{(P_B^{B'})^{-1}[\vec{v}]_B=[\vec{v}]_{B'}}$ Exemple : $[\vec{e'}_1]_B=P_B^{B'}\times\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$	Si B et B' sont deux bases <u>orthonormales</u> de E alors : $P_B^{B'}\in O(n)$ $\boxed{P_{B'}^{B}={}^t(P_B^{B'})}$

III. Formule de changement de base pour un endomorphisme

$$[f(\vec{v})]_{B'}\xleftarrow{\ P_{B'}^{B}\times\dots\ }[f(\vec{v})]_B\xleftarrow{\ Mat_B(f)\times\dots\ }[\vec{v}]_B\xleftarrow{\ P_B^{B'}\times\dots\ }[\vec{v}]_{B'}$$

$$[f(\vec{v})]_{B'}=\underbrace{P_{B'}^{B}\underbrace{\left(Mat_B(f)\underbrace{\left(P_B^{B'}\underbrace{[\vec{v}]_{B'}}_{\text{dans B'}}\right)}_{\text{dans B}}\right)}_{\text{dans B}}}_{\text{dans B'}}$$

donc : $\boxed{Mat_{B'}(f)=P_{B'}^{B}\times Mat_B(f)\times P_B^{B'}}$

Exemple : $[f(\vec{e'}_1)]_{B'}=P_{B'}^{B}\times Mat_B(f)\times P_B^{B'}\times\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

IV. Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Soit $q:E\to\mathbb{R}$ une forme quadratique ayant pour forme polaire $b:E\times E\to\mathbb{R}$ bilinéaire symétrique et $B=(\vec{e}_1;\dots;\vec{e}_n)$ base quelconque de E.

$$\boxed{Mat_B(q)=Mat_B(b)=\begin{pmatrix}b(\vec{e}_1;\vec{e}_1) & \dots & b(\vec{e}_n;\vec{e}_1)\\ \vdots & & \vdots\\ b(\vec{e}_1;\vec{e}_n) & \dots & b(\vec{e}_n;\vec{e}_n)\end{pmatrix}}$$

$\boxed{b(\vec{u};\vec{v})={}^t([\vec{u}]_B)\times Mat_B(b)\times[\vec{v}]_B}$ et $\boxed{q(\vec{u})={}^t([\vec{u}]_B)\times Mat_B(q)\times[\vec{u}]_B}$

${}^t([\vec{u}]_B)={}^t(P_B^{B'}\times[\vec{u}]_{B'})={}^t([\vec{u}]_{B'})\times{}^t(P_B^{B'})$ donc :

$$\boxed{Mat_{B'}(q)=Mat_{B'}(b)={}^t(P_B^{B'})\times Mat_B(b)\times P_B^{B'}}$$