Équations différentielles

Le corps des scalaires, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est noté K.
L'espace vectoriel des n -uplets K^n est canoniquement assimilé à l'espace vectoriel des matrices colonnes $\mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K})$.

1. Équations différentielles linéaires
   - a) Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants..p.2
   - b) Équations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2...p.4
2. Notions sur les équations différentielles non linéaires d'ordre 1...........................p.9

Pré-requis

Théorème de « la dérivée nulle sur un intervalle » :
Soit I un intervalle et $f:\mathrm{I}\to\mathrm{K}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I.
Si $\forall x\in\mathrm{I}$, $f'(x)=0$ alors il existe un scalaire k tel que $\forall x\in\mathrm{I}$, $f(x)=k$.

Démonstration : d'après l'inégalité des accroissements finis (le théorème des accroissements finis n'étant pas valide pour les fonctions à valeurs complexes), $\forall(a;b)\in\mathrm{I}^2$, $|f(b)-f(a)|\leqslant\left(\sup_{x\in\mathrm{I}}|f'(x)|\right)|b-a|$

Or ici $\sup_{x\in\mathrm{I}}|f'(x)|=0$ donc $\forall(a;b)\in\mathrm{I}^2$, $f(b)=f(a)$. □

Corollaire : deux primitives, sur un intervalle I, d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Démonstration : soient $f:\mathrm{I}\to\mathrm{K}$ et $g:\mathrm{I}\to\mathrm{K}$ telles que $\forall x\in\mathrm{I}$, $f'(x)=g'(x)$ alors $\forall x\in\mathrm{I}$, $(f-g)'(x)=0$
Donc $\exists k\in\mathrm{K}$ tel que $\forall x\in\mathrm{I}$, $f(x)-g(x)=k$. □

Théorème fondamental de l'analyse : soit I un intervalle, $f:\mathrm{I}\to\mathrm{K}$, $x_0\in\mathrm{I}$ et $y_0\in\mathrm{K}$.
Si f est continue sur I alors l'unique primitive de f sur I, valant y_0 en x_0 est la fonction F définie sur I par :

$$\boxed{\mathrm{F}(x)=\int_{x_0}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t+y_0}$$

Démonstration : soit $x\in\mathrm{I}$ et $h\in\mathbb{R}^*$ tel que $x+h\in\mathrm{I}$ alors :

$$\left|\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}-f(x)\right|=\left|\frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_x^{x+h}f(x)\,\mathrm{d}t\right)\right|=\frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\,\mathrm{d}t\right|$$

Pour $h>0$, on a donc : $\left|\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}-f(x)\right|\leqslant\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,\mathrm{d}t$

Pour $h<0$, on a donc : $\left|\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}-f(x)\right|\leqslant\frac{1}{-h}\int_{x+h}^{x}|f(t)-f(x)|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,\mathrm{d}t$

Or f étant continue en x , $\forall\varepsilon>0$, $\exists\eta>0$ tel que $|x-t|<\eta\Rightarrow|f(t)-f(x)|<\varepsilon$

Donc $\forall\varepsilon>0$, $\exists h\in\mathbb{R}^*$ tel que $\left|\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}-f(x)\right|\leqslant\frac{h}{h}\varepsilon=\varepsilon$

Ce qui signifie que $\lim_{h\to0}\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}=f(x)$ donc $\mathrm{F}'(x)=f(x)$ □

1. Équations différentielles linéaires

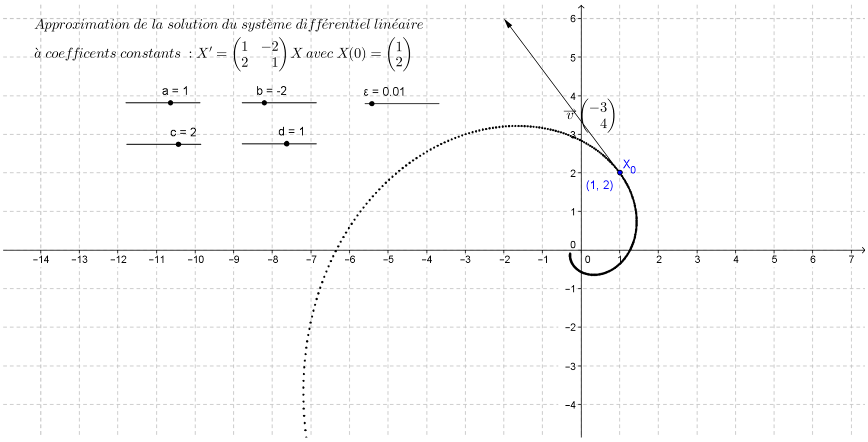
a) Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Définition d'un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants : soit une matrice $A \in M_n(K)$,
Le système différentiel linéaire (S) : $X' = AX$ est un système de n équations différentielles scalaires.
En effet, pour $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, on a : (S) : $\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1(t) = a_{1,1} x_1(t) + \ldots + a_{1,n} x_n(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n,1} x_1(t) + \ldots + a_{n,n} x_n(t) \end{cases}$
Une solution du système différentiel (S) sur un intervalle I est une fonction vectorielle $f : I \mapsto K^n$ dérivable sur l'intervalle I telle que : $\forall t \in I$, $f'(t) = A \times f(t)$.
Résoudre le système différentiel (S) sur I consiste à déterminer l'ensemble des fonctions solutions de (S) sur I.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ alors le système différentiel $X' = AX$ est $\begin{cases} x'_1 = \ldots \\ x'_2 = \ldots \end{cases}$

Théorème de Cauchy-Lipschitz d'existence et d'unicité de la solution d'un système différentiel linéaire homogène avec condition initiale : soit I un intervalle réel et un vecteur $X_0 \in K^n$, avec les notations précédentes, le problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur l'intervalle I.

Théorème admis.



Remarque la méthode d'Euler permet d'obtenir une approximation numérique de cette solution par un calcul itératif. Pour ε suffisamment petit, on obtient a une approximation $X(n\varepsilon) \approx X_n$
en posant $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n + \varepsilon A \times X_n$

Lien avec les équations différentielles homogènes scalaires d'ordre n à coefficients constants.
Les équations différentielles homogènes scalaires d'ordre n à coefficients constants peuvent être considérées comme des systèmes de n équations différentielles.
Exemple : pour une équation différentielle d'ordre 3, soient quatre scalaires $a \neq 0$, b, c et d

$$ay''' + by'' + cy' + dy = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{d}{a} & -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} \Leftrightarrow X' = AX \text{ avec } X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{d}{a} & -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$$

Ainsi le problème de Cauchy devient : $\begin{cases} ay''' + by'' + cy' + dy = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \\ y''(0) = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X' = AX \\ X_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{cases}$

Structure de l'ensemble des solutions d'un système différentiel linéaire homogène : soit I un intervalle réel et une matrice $A \in M_n(K)$. L'ensemble des solutions sur l'intervalle I du système différentiel linéaire X'=AX est un sous-espace vectoriel de dimension n l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur I.

Démonstration : soit $f : I \to K^n$ une solution d'un système différentielle X'=AX alors f est dérivable (donc continue) et $\forall t \in I$, $f'(t) = A f(t)$ donc f est de classe C^1 sur I. On démontre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t \in I$, $f^{(k)}(t) = A^k f(t)$ donc f est de classe C^k sur I. Ainsi f est de classe C^∞ sur I.

Soit $\begin{array}{l}\phi : C^{\infty}(I;K^n) \to C^{\infty}(I;K^n) \\ \quad f \mapsto f' - Af\end{array}$, l'application ϕ est un endomorphisme et l'ensemble des solutions du système différentiel $X' = AX$ est $Ker\,\phi$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $C^{\infty}(I;K^n)$.

Soit $B = (e_1;\ldots;e_n)$ la base canonique de K^n. En notant, pour $i \in [\![1;n]\!]$, f_i les solutions sur I des systèmes de Cauchy $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = e_i \end{cases}$, la famille $(f_1;\ldots;f_n)$ est une base de $Ker\,\phi$ ...

<u>Méthode de résolution d'un système différentiel linéaire homogène</u> : soit $A \in M_n(K)$ et $(S) : X' = AX$

► <u>Si la matrice A est diagonalisable</u>, en notant P la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres de A, et D la matrice diagonale on a : $D = P^{-1}AP$ c'est-à-dire $PDP^{-1} = A$

Alors : $(S) \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X$

Or $P^{-1}X' = (P^{-1}X)'$ donc en posant $Y = P^{-1}X$, on obtient : $\boxed{X' = AX \Leftrightarrow \begin{cases} Y' = DY \\ X = PY \end{cases}}$ (inutile de calculer P^{-1})

En notant $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ on obtient $Y' = DY \Leftrightarrow \begin{cases} y'_1 = \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ y'_n = \lambda_n y_n \end{cases}$

Il s'agit donc de résoudre n équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants.

$$Y' = DY \Leftrightarrow \exists\ (\alpha_1;\ldots;\alpha_n) \in K^n \ :\ \forall t \in I\ ,\ \begin{cases} y_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ y_n(t) = \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

Par multiplication matricielle X=PY, chacune des n fonctions coordonnées des solutions du système différentiel (S) est combinaison linéaire des fonctions $t \mapsto e^{\lambda_1 t};\ldots;t \mapsto e^{\lambda_n t}$.

► <u>Si la matrice A n'est pas diagonalisable</u>, alors elle est trigonalisable (quitte à se placer dans $\mathbb{C}$) en notant T une matrice triangulaire semblable à A et P la matrice de passage de la base canonique à la base de trigonalisation, on a :

$$\boxed{X' = AX \Leftrightarrow \begin{cases} Y' = TY \\ X = PY \end{cases}}$$

En notant $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{1,2} & \ldots & t_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1;n} \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, on a : $Y' = TY \Leftrightarrow \begin{cases} y'_1 = \lambda_1 y_1 + t_{1,2} y_2 + \ldots + t_{1;n} y_n \\ \vdots \\ y'_{n-1} = \lambda_{n-1} y_{n-1} + t_{n-1;n} y_n \\ y'_n = \lambda_n y_n \end{cases}$

Dans ce cas le système linéaire $Y' = TY$ est un système de n équations différentielles linéaires à coefficients constants.
Ce système peut être résolu par remontée :

on résout la dernière qui est une équation différentielle linéaire homogène
l'avant dernière est une équation différentielle dont le second membre a été déterminé précédemment
etc...

Par multiplication matricielle X=PY, chacune des n fonctions coordonnées des solutions du système différentiel (S) est combinaison linéaire des fonctions $t \mapsto P_1(t)e^{\lambda_1 t}$;... ; $t \mapsto P_n(t)e^{\lambda_n t}$ où les fonctions P_i sont des fonctions polynomiales.

► <u>Si</u> $A \in M_n(\mathbb{R})$ <u>ne peut pas être réduite</u> dans $M_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire si son polynôme caractéristique n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$) alors les valeurs propres non-réelles sont conjuguées deux-à-deux.

En effet $P_A(X) \in \mathbb{R}[X]$, donc, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\overline{P_A(\lambda)} = P_A(\overline{\lambda})$

Ainsi, si $\lambda \in sp(A)$ alors $P_A(\overline{\lambda}) = \overline{P_A(\lambda)} = \overline{0} = 0$ donc $\overline{\lambda} \in sp(A)$

En notant $\lambda = a + ib$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\forall (\alpha;\beta) \in \mathbb{C}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\overline{\lambda} t} = e^{at}(\alpha e^{ibt} + \beta e^{-ibt}) = e^{at}((\alpha+\beta)\cos(bt) + i(\alpha-\beta)\sin(bt))$$

Et en particulier, si $\overline{\alpha} = \beta$ alors $\alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\overline{\lambda} t} = e^{at}(2\,\mathrm{Re}(\alpha) \times \cos(bt) - 2\,\mathrm{Im}(\alpha) \times \sin(bt))$

Ce calcul permet alors d'exprimer les fonctions coordonnées des solutions du système différentiel à l'aide des fonctions exponentielle, sinus et cosinus.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et le problème de Cauchy (P) : $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$

Le polynôme caractéristique de A est donné par $\chi_A(X) = X^2 - 2X + 5 = (X - 1 + 2i)(X - 1 - 2i)$.

χ_A étant scindé et à racines simples, la matrice A est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$.

$dim(E_{1+2i}(A))=1$ et $(A-(1+2i)I_2)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $E_{1+2i}(A)=Vect\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$dim(E_{1-2i}(A))=1$ et $(A-(1-2i)I_2)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $E_{1+2i}(A)=Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right)$

Ainsi en notant $P=\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ on a : $A=P\begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}P^{-1}$

D'où : $X'=AX \Leftrightarrow \begin{cases} Y'=\begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}Y \\ X=PY \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists(\lambda;\mu)\in\mathbb{C}^2 \text{ tel que : } Y: t\mapsto \begin{pmatrix} \lambda e^{(1+2i)t} \\ \mu e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} \\ X=PY \end{cases}$

Les solutions complexes définies sur $\mathbb{R}$ de X'=AX sont donc les fonctions de la forme :

$t\mapsto \lambda\begin{pmatrix} i e^{(1+2i)t} \\ e^{(1+2i)t} \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} e^{(1-2i)t} \\ i e^{(1-2i)t} \end{pmatrix}$ avec $(\lambda;\mu)\in\mathbb{C}^2$ c'est-à-dire : $t\mapsto e^t\begin{pmatrix} \lambda i e^{2it}+\mu e^{-2it} \\ \lambda e^{2it}+\mu i e^{-2it} \end{pmatrix}$

Pour déterminer deux solutions réelles définies sur $\mathbb{R}$ il suffit de fixer $\overline{\lambda i}=\mu$

Par exemple : si $\begin{cases} \lambda=1 \\ \mu=-i \end{cases}$ alors $t\mapsto e^t\begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix}$ est une solution sur $\mathbb{R}$ réelle de $X'=AX$.

Si $\begin{cases} \lambda=i \\ \mu=-1 \end{cases}$ alors $t\mapsto e^t\begin{pmatrix} -2\cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}$ est une solution sur $\mathbb{R}$ réelle de $X'=AX$.

La famille $\left\{t\mapsto e^t\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}; t\mapsto e^t\begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}\right\}$ est libre car, par exemple pour $t=0$ on a :

$$\alpha e^0\begin{pmatrix} \cos(2\times0) \\ \sin(2\times0) \end{pmatrix}+\beta e^0\begin{pmatrix} -\sin(2\times0) \\ \cos(2\times0) \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \end{cases}$$

Conclusion, les solutions sur $\mathbb{R}$ réelles de $X'=AX$ sont $Vect\left(t\mapsto e^t\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}; t\mapsto e^t\begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}\right)$

Le problème de Cauchy (P) a donc pour unique solution sur $\mathbb{R}$ réelle la fonction $t\mapsto e^t\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}+2e^t\begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$.

► <u>Cas d'un système différentielle linéaire avec second membre.</u>

Soit I un intervalle réel et une fonction vectorielle $B: I\to K^n$. Le système linéaire $X'=AX+B$ est un système de n équations différentielles avec second membre. En effet, en posant $\forall t\in I$, $X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, et $B(t)=\begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$

$$X'=AX+B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1(t)=a_{1,1}x_1(t)+\dots+a_{1,n}x_n(t)+b_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t)=a_{n,1}x_1(t)+\dots+a_{n,n}x_n(t)+b_n(t) \end{cases}$$

Soit R la matrice réduite telle que $R=P^{-1}AP$ alors : $X'=AX+B \Leftrightarrow \begin{cases} X=PY \\ Y'=RY+P^{-1}B \end{cases}$ (nécessaire de calculer P^{-1})

La résolution du système différentiel s'effectue comme précédemment, sachant que chaque équation du système réduit est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 avec second membre.

b) Équations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2

<u>Définition des solutions d'une équation linéaire scalaire d'ordre 1</u> : soit I un intervalle réel, trois fonctions $a: I\to K$; $b: I\to K$ et $c: I\to K$ continues sur l'intervalle I et l'équation différentielle (E) : $a(t)x'+b(t)x=c(t)$

Soit J un intervalle inclus dans l'intervalle I, une solution de l'équation différentielle (E) sur J est une fonction f dérivable sur J et telle que : $\forall t\in J$, $a(t)\times f'(t)+b(t)\times f(t)=c(t)$

<u>Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire scalaire d'ordre 1</u> : soit I un intervalle réel, trois fonctions $a: I\to K$; $b: I\to K$ et $c: I\to K$ continues sur l'intervalle I et l'équation différentielle (E) : $a(t)x'+b(t)x=c(t)$

et son équation homogène associée (H) : $a(t)x'+b(t)x=0$.

Si $\forall t\in I$, $a(t)\neq0$ alors pour $t_0\in I$,

► l'ensemble des solutions de (H) est la droite vectorielle $V=vect\begin{pmatrix} I\to\mathbb{R} \\ t\mapsto e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{b(u)}{a(u)}du} \end{pmatrix}$

► l'ensemble des solutions de (E) est un sous-espace affine des fonctions de classe C^1 sur I de direction V.

Démonstration : soit f une solution de (E), alors f est dérivable sur I donc ...

si $\forall t \in \mathrm{I}$, $a(t) \neq 0$ alors $\forall t \in \mathrm{I}$, $f'(t) = \dfrac{c(t) - b(t) \times f(t)}{a(t)}$ donc...

Soit ϕ l'application linéaire définie par : $\begin{array}{l} \phi : \mathrm{C}^1(\mathrm{I};\mathrm{K}) \to \mathrm{C}^0(\mathrm{I};\mathrm{K}) \\ \qquad f \mapsto af' + bf \end{array}$

L'équation $\phi(x) = c$ est une équation linéaire : si $c \in \mathrm{Im}\,\phi$ alors l'ensemble des solutions de l'équation $\phi(x) = c$ est un espace affine de direction $\mathrm{Ker}\,\phi$.

Détermination de $\mathrm{Ker}\,\phi$: $\phi(x) = 0_{\mathrm{C}^0(\mathrm{I};\mathrm{K})} \Leftrightarrow \forall t \in \mathrm{I}$, $a(t) \times x'(t) + b(t) \times x(t) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathrm{I}$, $x'(t) = -\dfrac{b(t)}{a(t)} \times x(t)$

Soit $t_0 \in \mathrm{I}$ et F définie sur I par $\mathrm{F}(t) = \int_{t_0}^{t} -\dfrac{b(u)}{a(u)}\,\mathrm{d}u$, alors : $\phi(x) = 0_{\mathrm{C}^0(\mathrm{I};\mathrm{K})} \Leftrightarrow \forall t \in \mathrm{I}$, $x'(t) = \mathrm{F}'(t) \times x(t)$

en posant $\forall t \in \mathrm{I}$, $x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{F}(t)} y(t)$ (méthode de variation de la constante) ce qui est toujours possible car $\forall t \in \mathrm{I}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{F}(t)} \neq 0$, on a : $\phi(x) = 0_{\mathrm{C}^0(\mathrm{I};\mathrm{K})} \Leftrightarrow \forall t \in \mathrm{I}$, $\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{F}(t)} y(t) \\ \mathrm{F}'(t)\mathrm{e}^{\mathrm{F}(t)} y(t) + \mathrm{e}^{\mathrm{F}(t)} y'(t) = \mathrm{F}'(t)\mathrm{e}^{\mathrm{F}(t)} y(t) \end{cases} \Leftrightarrow \forall t \in \mathrm{I}$, $\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{F}(t)} y(t) \\ y'(t) = 0 \end{cases}$

$\mathrm{Ker}\,\varphi = vect\left(t \mapsto \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} \frac{b(u)}{a(u)}\mathrm{d}u}\right)$

Recherche d'une solution particulière : $\forall t \in \mathrm{I}$, $a(t) \times x'(t) + b(t) \times x(t) = c(t) \Leftrightarrow \forall t \in \mathrm{I}$, $\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{F}(t)} y(t) \\ \mathrm{e}^{\mathrm{F}(t)} y'(t) = c(t) \end{cases}$

Or la fonction $t \mapsto c(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{F}(t)}$ est continue sur I donc en posant $y(t) = \int_{t_0}^{t} c(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{F}(u)}\mathrm{d}u$ pour un réel $\mathrm{K} \in \mathrm{I}$ on obtient une solution particulière de (E) sous la forme : $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{F}(t)} \int_{t_0}^{t} c(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{F}(u)}\mathrm{d}u$.□

Remarque : si $a(t)$ s'annule sur l'intervalle I, $\mathrm{Ker}\,\phi$ reste un sous-espace vectoriel mais il peut être de dimension différente de 1.

<u>Théorème de Cauchy-Lipschitz d'existence et d'unicité d'une solution</u> : soit I un intervalle réel, trois fonctions $a : \mathrm{I} \to \mathrm{K}$; $b : \mathrm{I} \to \mathrm{K}$ et $c : \mathrm{I} \to \mathrm{K}$ continues sur l'intervalle I, et deux scalaire $t_0 \in \mathrm{I}$ et $x_0 \in \mathrm{K}$.

Si $\forall t \in \mathrm{I}$, $a(t) \neq 0$ alors l'équation différentielle avec condition initiale (E) : $\begin{cases} a(t)x' + b(t)x = c(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

admet une unique solution sur l'intervalle I.

Théorème admis.

⚠ Ni l'existence, ni l'unicité ne sont assurées si $a(t)$ s'annule sur l'intervalle I.

Rappels sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants :

Soient $a \neq 0$, b et c trois nombres complexe et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur un intervalle I.

L'application : $\begin{array}{l} \Phi : \mathrm{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{C}) \to \mathrm{C}^0(\mathrm{I};\mathbb{C}) \\ \qquad y \mapsto a\,y'' + b\,y' + c\,y \end{array}$ est $\mathbb{C}$ -linéaire donc l'équation $\Phi(y) = f$ est une équation linéaire, donc l'ensemble de ses solutions est un $\mathbb{C}$ _espace affine de direction $\mathrm{Ker}\,\Phi$.

De plus $ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{a} & -\dfrac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathrm{Y}' = \mathrm{AY}$ avec $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{a} & -\dfrac{b}{a} \end{pmatrix}$

Or le polynôme caractéristique $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = -\mathrm{X}\left(-\dfrac{b}{a} - \mathrm{X}\right) + \dfrac{c}{a} = \mathrm{X}^2 + \dfrac{b}{a}\mathrm{X} + \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{a}(aX^2 + bX + c)$

En posant le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, si $\Delta \neq 0$ alors $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$ est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ à racines simples donc la matrice A est ….

Si $\Delta = 0$ alors $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$ est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et admet une seule racine double donc la matrice A est...

De plus la matrice A n'est pas diagonalisable sinon elle serait semble à une matrice scalaire $(\lambda \mathrm{I}_2)$ et serait donc elle même une matrice scalaire ce qui est absurde. Ainsi la matrice A est semblable à une matrice …

<u>Structure des solutions complexes des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et réels</u> : Soient $a\neq 0$, b et c trois complexes et $f:\mathrm{I}\to\mathbb{C}$ une fonction continue sur un intervalle I.
L'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constant (E) : $ay''+by'+cy=f$
a pour équation différentielle homogène l'équation différentielle (H) : $ay''+by'+cy=0$

Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique (C) : $ar^2+br+c=0$.

Si $\Delta\neq 0$ alors en notant z_1 et z_2 <u>les racines complexes</u> distinctes de l'équation caractéristique (C),
les solutions de l'équation différentielle homogène (H) sur I sont les fonctions de $\underset{\mathbb{C}}{Vect}\left(\begin{cases}\mathrm{I}\to\mathbb{C}\\ t\mapsto \mathrm{e}^{z_1 t}\end{cases};\begin{cases}\mathrm{I}\to\mathbb{C}\\ t\mapsto \mathrm{e}^{z_2 t}\end{cases}\right)$.

Si $\Delta=0$ alors en notant z_0 <u>la racine complexe double</u> de l'équation caractéristique (C),
les solutions de l'équation différentielle homogène (H) sur I sont les fonctions de $\underset{\mathbb{C}}{Vect}\left(\begin{cases}\mathrm{I}\to\mathbb{C}\\ t\mapsto \mathrm{e}^{z_0 t}\end{cases};\begin{cases}\mathrm{I}\to\mathbb{C}\\ t\mapsto t\,\mathrm{e}^{z_0 t}\end{cases}\right)$.

En notant y_0 une solution particulière de l'équation différentielle (E), les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions du $\mathbb{C}$ -espace affine $y_0+\mathrm{V}$ (notation de Gassmann) où V est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle homogène (H).

Soient $a\neq 0$, b et c trois réels et $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
L'application : $\begin{array}{l}\Phi:\mathrm{C}^2(\mathrm{I},\mathbb{R})\to\mathrm{C}^0(\mathrm{I};\mathbb{R})\\ \qquad y\mapsto a\,y''+b\,y'+c\,y\end{array}$ est linéaire donc l'équation $\Phi(y)=f$ est une équation $\mathbb{R}$ -linéaire, ainsi l'ensemble de ses solutions est un $\mathbb{R}$ -espace affine de direction $\mathrm{Ker}\,\Phi$.
Si $\Delta\geqslant 0$ les solutions précédentes sont des fonctions à valeurs réelles. En revanche si $\Delta<0$, puisque $\mathrm{X}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, ces racines sont des complexes conjugués. En notant $\alpha+i\beta$ et $\alpha-i\beta$ l'écriture algébrique ses racines, on cherche

$$
\begin{aligned}
(\lambda;\mu)\in\mathbb{C}^2 \text{ tels que } \forall t\in\mathrm{I},\ \lambda\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t}+\mu\,\mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)t}\in\mathbb{R} \quad
&\Leftrightarrow\quad \forall t\in\mathrm{I},\ \lambda\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t}+\mu\,\mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)t}=\overline{\lambda\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t}+\mu\,\mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)t}}\\
&\Leftrightarrow\quad \forall t\in\mathrm{I},\ \lambda\,\mathrm{e}^{i\beta t}+\mu\,\mathrm{e}^{-i\beta t}=\overline{\lambda}\,\mathrm{e}^{-i\beta t}+\overline{\mu}\,\mathrm{e}^{i\beta t}\\
&\Leftrightarrow\quad \forall t\in\mathrm{I},\ (\lambda-\overline{\mu})\,\mathrm{e}^{i\beta t}+(\mu-\overline{\lambda})\,\mathrm{e}^{i\beta t}=0\\
&\Leftrightarrow\quad \lambda=\overline{\mu} \text{ car } \left(\mathrm{e}^{i\beta t};\mathrm{e}^{-i\beta t}\right) \text{ est une famille libre de } \mathrm{C}^2(\mathrm{I};\mathbb{C})
\end{aligned}
$$

Enfin, pour $\lambda\in\mathbb{C}$, $\lambda\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t}+\overline{\lambda}\,\mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)t}=2\,\mathrm{e}^{\alpha t}\left(\Re\mathrm{e}(\lambda)\cos(\beta t)+\Im\mathrm{m}(\lambda)\sin(\beta t)\right)$

<u>Structure des solutions réelles des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et réels</u> :
Soient $a\neq 0$, b et c trois réels et $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
L'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constant (E) : $ay''+by'+cy=f$
a pour équation différentielle homogène l'équation différentielle (H) : $ay''+by'+cy=0$

Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique (C) : $ar^2+br+c=0$.

Si $\Delta>0$ alors en notant r_1 et r_2 <u>les racines réelles</u> distinctes de l'équation caractéristique (C),
les solutions de l'équation différentielle homogène (H) sur I sont les fonctions de $\underset{\mathbb{R}}{Vect}\left(\begin{cases}\mathrm{I}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto \mathrm{e}^{r_1 t}\end{cases};\begin{cases}\mathrm{I}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto \mathrm{e}^{r_2 t}\end{cases}\right)$.

Si $\Delta=0$ alors en notant r <u>la racine réelle double</u> de l'équation caractéristique (C),
les solutions de l'équation différentielle homogène (H) sur I sont les fonctions de $\underset{\mathbb{R}}{Vect}\left(\begin{cases}\mathrm{I}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto \mathrm{e}^{rt}\end{cases};\begin{cases}\mathrm{I}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto t\,\mathrm{e}^{rt}\end{cases}\right)$.

Si $\Delta<0$ alors $\alpha+i\beta$ et $\alpha-i\beta$ étant <u>les racines complexes conjuguées</u> de l'équation caractéristique (C), les solutions de l'équation différentielle homogène (H) sur I sont les fonctions de $Vect\left(\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)\end{cases};\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)\end{cases}\right)$

En notant y_0 une solution particulière de l'équation différentielle (E), les solutions réelles de l'équation différentielle (E) sont les fonctions du $\mathbb{R}$ -espace affine $y_0+\mathrm{V}$ (notation de Gassmann) où V est l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle homogène (H).

Exemple :

Recherche d'une solution particulière d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec un second membre de la forme $\mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$:
Soit $a\neq 0$, b et c trois complexes, $\mathrm{P}\in\mathbb{C}_n[X]$, $\lambda\in\mathbb{C}$ et l'équation différentielle (E) : $ay''+by'+cy=\mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$

Soit l'équation caractéristique (C) : $ar^2+br+c=0$.

Si λ n'est pas racine de l'équation (C) alors il existe $\mathrm{Q}\in\mathbb{C}_n[X]$ tel que $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ t\mapsto \mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{\lambda t}\end{array}$ soit solution de (E).

Si λ est racine simple de (C) alors il existe $\mathrm{Q}\in\mathbb{C}_n[X]$ tel que $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ t\mapsto t\,\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{\lambda t}\end{array}$ soit solution de (E).

Si λ est racine double de (C) alors il existe $\mathrm{Q}\in\mathbb{C}_n[X]$ tel que $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ t\mapsto t^2\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{\lambda t}\end{array}$ soit solution de (E).

Exemple :

Définition des solutions d'une équation linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients variables :
Soit I un intervalle réel, quatre fonctions $a:\mathrm{I}\to\mathrm{K}$; $b:\mathrm{I}\to\mathrm{K}$, $c:\mathrm{I}\to\mathrm{K}$ et $d:\mathrm{I}\to\mathrm{K}$ continues sur l'intervalle I et l'équation différentielle (E) : $a(t)x''+b(t)x'+c(t)x=d(t)$
Soit J un intervalle inclus dans l'intervalle I, une solution de l'équation différentielle (E) sur J est une fonction f deux fois dérivable sur J et telle que : $\forall t\in\mathrm{J}$, $a(t)\times f''(t)+b(t)\times f'(t)+c(t)\times f(t)=d(t)$

Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire scalaire d'ordre 2 :
Soit I un intervalle réel, quatre fonctions $a:\mathrm{I}\to\mathrm{K}$; $b:\mathrm{I}\to\mathrm{K}$; $c:\mathrm{I}\to\mathrm{K}$ et $d:\mathrm{I}\to\mathrm{K}$ continues sur l'intervalle I et :
l'équation différentielle (E) : $a(t)x''+b(t)x'+c(t)x=d(t)$
et son équation homogène associée (H) : $a(t)x''+b(t)x'+c(t)x=0$
Si $\forall t\in\mathrm{I}$, $a(t)\neq 0$ alors :
► l'ensemble des solutions de (H) est un sous-espace vectoriel V de dimension 2 des fonctions de classe C^2 sur I
► l'ensemble des solutions de (E) est un sous-espace affine de direction V des fonctions de classe C^2 sur I.

Démonstration partielle : soit f une solution de (E) alors f est deux fois dérivable sur I donc f et f' sont continues sur I.
De plus, si $\forall t\in\mathrm{I}$ $a(t)\neq 0$ alors : $f''(t)=\dfrac{d(t)-b(t)\times f'(t)-c(t)\times f(t)}{a(t)}$ donc...
Soit ϕ l'application linéaire définie par : $\begin{array}{l}\phi:C^2(\mathrm{I};\mathrm{K})\to C^0(\mathrm{I};\mathrm{K})\\ \quad f\mapsto af''+bf'+cf\end{array}$.
L'équation $\phi(x)=d$ est une équation linéaire : si $d\in\mathrm{Im}\,\phi$ alors l'ensemble des solutions de l'équation $\phi(x)=d$ est un espace affine de direction $\mathrm{Ker}\,\phi$.
On admet que $dim(\mathrm{Ker}\,\phi)=2$. □

Théorème de Cauchy-Lipschitz d’existence et d'unicité d'une solution : soit I un intervalle réel, quatre fonctions $a:\mathrm{I}\to\mathrm{K}$; $b:\mathrm{I}\to\mathrm{K}$; $c:\mathrm{I}\to\mathrm{K}$ et $d:\mathrm{I}\to\mathrm{K}$ continues sur l'intervalle I, et trois scalaire $t_0\in\mathrm{I}$; $x_0\in\mathrm{K}$ et $x'_0\in\mathrm{K}$.

Si $\forall t\in\mathrm{I}$, $a(t)\neq 0$ alors l'équation différentielle avec condition initiale (E) : $\begin{cases}a(t)x''+b(t)x'+c(t)x=d(t)\\ x(t_0)=x_0\\ x'(t_0)=x'_0\end{cases}$

admet une unique solution sur l'intervalle I.

Théorème admis.

Techniques classiques de résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre 2

Expression des solutions de l'équation complète lorsque une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas sur I est connue (ou « variation de la constante ») :
Soit I un intervalle, quatre fonctions $a:\mathrm{I}\to\mathrm{K}$; $b:\mathrm{I}\to\mathrm{K}$; $c:\mathrm{I}\to\mathrm{K}$ et $d:\mathrm{I}\to\mathrm{K}$ continues sur l'intervalle I telles que $\forall t\in\mathrm{I}$, $a(t)\neq 0$ et l'équation différentielle (E) : $a(t)x''+b(t)x'+c(t)x=d(t)$.
Soit f une solution solution (dite particulière) de l'équation homogène (H) sur I : $a(t)x''+b(t)x'+c(t)x=0$
Si $f(t)$ se s'annule pas sur l'intervalle I, i.e. : $\forall t\in\mathrm{I}$, $f(t)\neq 0$.
Alors , en posant $x=f\times y$ (variation de la constante y) on a $y\overset{\text{def}}{=}\dfrac{x}{f}$ et : $\boxed{x\in C^2(\mathrm{I};\mathrm{K})\Leftrightarrow y\in C^2(\mathrm{I};\mathrm{K})}$

Ainsi, pour tout réel $t \in \mathrm{I}$, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & f(t)\times y(t)= & x(t) & \ldots\times c(t) \\
 & f(t)\times y'(t)+ & f'(t)\times y(t)= & x'(t) & \ldots\times b(t) \\
f(t)\times y''(t)+ & 2f'(t)\times y'(t)+ & f''(t)\times y(t)= & x''(t) & \ldots\times a(t) \\
\hline
a(t)f(t)y''(t)+ & \big(b(t)f(t)+2a(t)f'(t)\big)y'(t)+ & \underbrace{\big(a(t)f''(t)+b(t)f'(t)+c(t)f(t)\big)}_{=0}y(t)= & \multicolumn{2}{l}{a(t)x''(t)+b(t)x'(t)+c(t)x(t)}
\end{array}$$

$$a(t)x''+b(t)x'+c(t)x=d(t) \Leftrightarrow \begin{cases} x=fy \\ \big(a(t)f(t)\big)y''+\big(b(t)f(t)+2a(t)f'(t)\big)y'=d(t)\end{cases}$$

Ainsi l'équation différentielle (E) se ramène à la résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre car en posant $z=y'$ on a l'équation différentielle : $\big(a(t)f(t)\big)z'+\big(b(t)f(t)+2a(t)f'(t)\big)z=d(t)$

Autres « classiques » :

►Si les fonctions a, b, c et d sont polynomiales rechercher une (ou des) solutions polynomiales

►Si les fonctions a, b et c sont polynomiales et d est développable en série entière, rechercher des solutions développables en séries entières en utilisant l'unicité du développement en série entière.

►Utiliser un changement de fonction inconnue pour se ramener à une équation différentielle plus simple.
En posant $\forall t\in\mathrm{I}$, $\boxed{y(t)\overset{\text{def}}{=}\varphi(x(t);t)}$, on cherche à exprimer $a(t)x''(t)+b(t)x'(t)+c(t)x(t)$ en fonction de $y(t)$, $y'(t)$ et $y''(t)$. On veillera à s'assurer que toute x fonction solution de (E) puisse définir une fonction y deux fois dérivable sur I.

⚠ En général, $y'(t)\neq\varphi(x'(t);t)$
$y''(t)\neq\varphi(x''(t);t)$

Après avoir déterminé $y'(t)$ et $y''(t)$, on détermine trois fonction A, B et C définies sur I telles que :
$\forall t\in\mathrm{I}$, $a(t)x''(t)+b(t)x'(t)+c(t)x(t)=\mathrm{A}(t)y''(t)+\mathrm{B}(t)y'(t)+\mathrm{C}(t)y(t)$

$$\begin{array}{rcl}
a(t)x''+b(t)x'+c(t)x=d(t)\quad(\mathrm{E}) & & \mathrm{A}(t)y''(t)+\mathrm{B}(t)y'(t)+\mathrm{C}(t)y(t)=\mathrm{D}(t)\quad(\mathrm{E}') \\
f \text{ est solution de (E) sur l'intervalle I} & \Leftrightarrow & g:t\mapsto\varphi(f(t);t) \text{ est solution de (E') sur l'intervalle I} \\
 & \Leftrightarrow & \forall t\in\mathrm{I},\ g(t)=\ldots \\
\forall t\in\mathrm{I},\ f(t)=\ldots & \Leftrightarrow &
\end{array}$$

►Utiliser un changement de variable pour se ramener à une équation différentielle plus simple (si possible à coefficients constants).

Exemple : en posant $t=\varphi(u)$, où $\varphi:\mathrm{I}'\to\mathrm{I}$ est un C^2 difféomorphisme de l'intervalle I' dans l'intervalle I : $\begin{array}{c}\mathrm{I}'\to\mathrm{I}\\ u\mapsto\varphi(u)\\ \varphi^{-1}(t)\leftarrow t\end{array}$

$\forall t\in\mathrm{I}$, $a(t)x''(t)+b(t)x'(t)+c(t)x(t)=d(t) \quad\Leftrightarrow\quad \forall u\in\mathrm{I}'$, $a(\varphi(u))x''(\varphi(u))+b(\varphi(u))x'(\varphi(u))+c(\varphi(u))x(\varphi(u))=d(\varphi(u))$

⚠ En général, $\big(x(\varphi(u))\big)'\neq x'(\varphi(u))$
$\big(x(\varphi(u))\big)''\neq x''(\varphi(u))$

$\forall u\in\mathrm{I}'$, en posant $\boxed{y(u)\overset{\text{def}}{=}x(\varphi(u))=x(t)}$ on a : $y'(u)=\big(x(\varphi(u))\big)'=\varphi'(u)\times x'(\varphi(u))$
$y''(u)=\big(x(\varphi(u))\big)''=\varphi''(u)\times x'(\varphi(u))+(\varphi'(u))^2\times x''(\varphi(u))$

En utilisant ces relations, on détermine trois fonctions A, B et C telles que :
$\forall u\in\mathrm{I}'$, $a(\varphi(u))x''(\varphi(u))+b(\varphi(u))x'(\varphi(u))+c(\varphi(u))x(\varphi(u))=\mathrm{A}(u)y''(u)+\mathrm{B}(u)y'(u)+\mathrm{C}(u)y(u)$

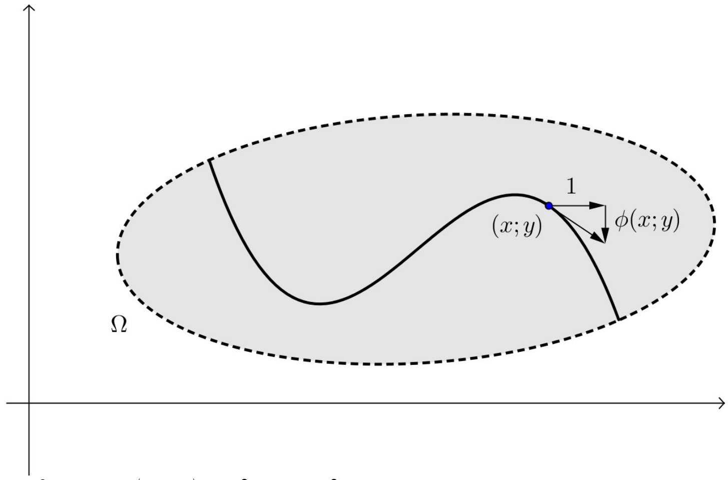
$$\begin{array}{rcl}
a(t)x''+b(t)x'+c(t)x=d(t)\quad(\mathrm{E}) & & \mathrm{A}(u)y''+\mathrm{B}(u)y'+\mathrm{C}(u)y=d(\varphi(u))\quad(\mathrm{E}') \\
f \text{ est solution de (E) sur l'intervalle I} & \Leftrightarrow & g\overset{\text{def}}{=}f\circ\varphi \text{ est solution de (E') sur l'intervalle I'} \\
 & \Leftrightarrow & \forall u\in\mathrm{I}',\ g(u)=\ldots \\
\forall t\in\mathrm{I},\ f(t)=\ldots & \Leftrightarrow &
\end{array}$$

⚠ L'équation différentielle (E) n'est résolue que lorsque $x(t)$ est déterminée. Ainsi il est nécessaire d'utiliser la relation $\varphi^{-1}(t)=u$ car : $g(u)=f(\varphi(u)) \quad\Leftrightarrow\quad g(\varphi^{-1}(t))=f(t)$

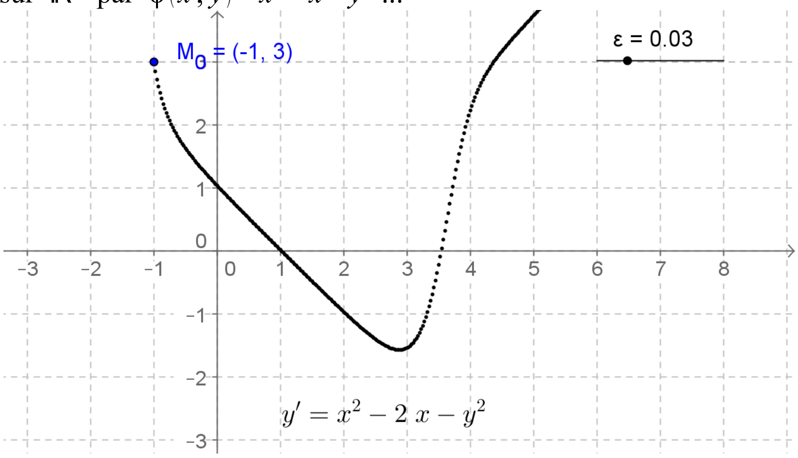
2. Notions sur les équations différentielles non linéaires d'ordre 1

Définition d'une équation différentielle du premier ordre : soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $\phi:\Omega\to\mathbb{R}$ continue sur Ω. L'équation différentielle (E) : $y'=\phi(x;y)$ est une équation différentielle d'ordre 1.
Soit un intervalle I, une solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle I est une fonction f dérivable sur I telle que $\forall x\in\mathrm{I}$, $\begin{cases}(x;f(x))\in\Omega\\ f'(x)=\phi(x;f(x))\end{cases}$.
On appelle courbe intégrale de (E) toute représentation graphique d'une solution de (E) sur l'intervalle I.
Une solution est dite maximale si elle ne peut pas être prolongée en une solution de (E) sur un intervalle plus grand.

Remarque : le champ de vecteurs $\begin{matrix}\Omega\to\mathbb{R}^2\\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1\\ \phi(x;y)\end{pmatrix}\end{matrix}$ permet de connaître en tout point de coordonnées $(x;y)$ d'une courbe intégrale, un vecteur directeur de cette courbe.



Exemple : Pour ϕ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\phi(x;y)=x^2-x-y^2$ ...

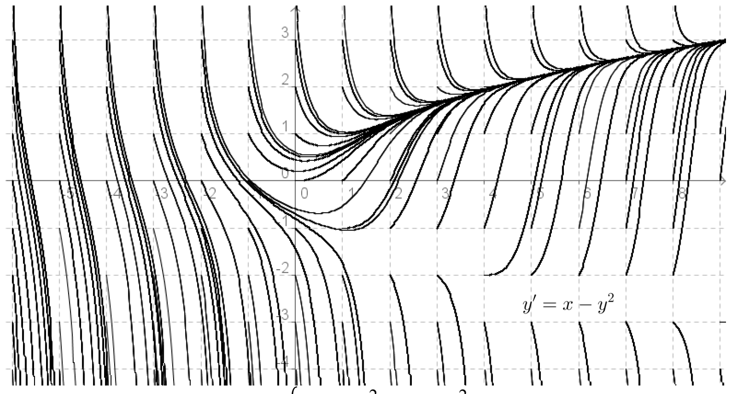


Remarque : si ϕ n'est pas une fonction linéaire, il est impossible d'invoquer une structure affine pour l'ensemble des solutions ni d'utiliser le principe de superposition des solutions.

Théorème de Cauchy-Lipschitz : soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, une fonction $\phi:\Omega\to\mathbb{R}$ de classe C^1 sur Ω et $(x_0;y_0)\in\Omega$. Le problème de Cauchy (C) : $\begin{cases}y'=\phi(x;y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ admet une unique solution maximale.

Théorème admis.
Remarque : d'un point de vue graphique, ce théorème assure que deux courbes intégrales ne peuvent pas « se croiser ».
Plus précisément : si f est solution de (C) sur l'intervalle I et g est solution de (C) sur l'intervalle J alors :

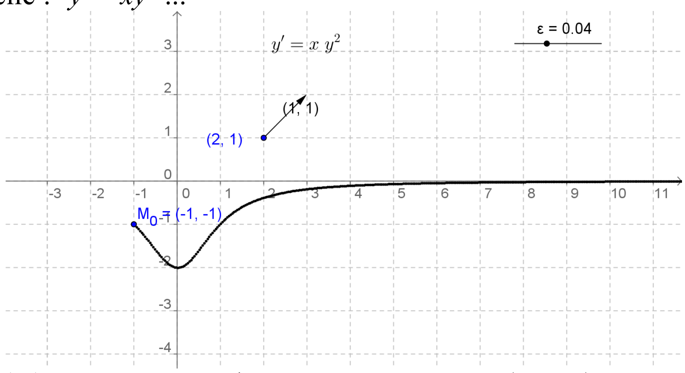
$$\begin{cases}x_0\in\mathrm{I}\cap\mathrm{J}\\ \forall x\in\mathrm{I}\cap\mathrm{J},\ f(x)=g(x)\end{cases}$$



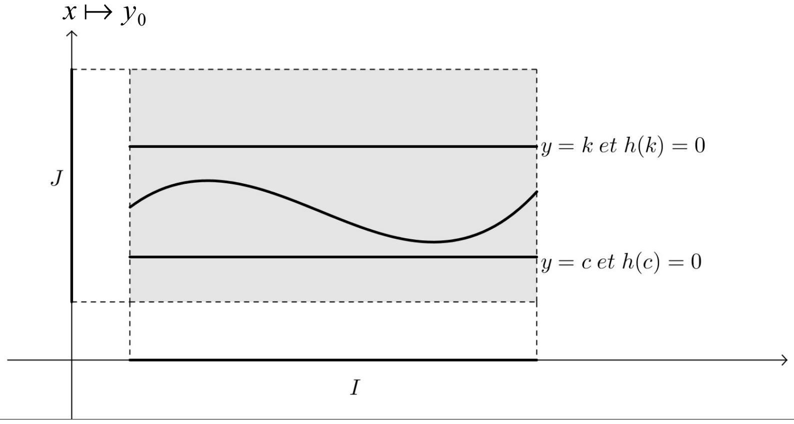
Exemple : l'unique solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} y'=x^2-x-y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$ est...

<u>Définition des équations différentielles d'ordre 1 à variables séparables</u> : une équation différentielle du premier ordre (E) est dite « à variables séparables » si et seulement s'il existe deux intervalles I et J et deux fonctions $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ continues sur I et J telles que (E) puisse s'écrire : $(\mathrm{E}) : y' = g(x) \times h(y)$.

Exemple : L'équation différentielle : $y' = xy^2$ ...



Remarque : si $(x ; y) \mapsto g(x) \times h(y)$ est de classe C^1 sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ alors pour $(x_0 ; y_0) \in \Omega$ tel que $h(y_0) = 0$ alors le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que le problème de Cauchy : (C) $\begin{cases} y' = g(x) \times h(y) \\ y'(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet comme unique solution maximale la fonction constante $\begin{array}{l} \mathrm{I} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y_0 \end{array}$.



<u>Méthode de résolution des équations différentielles d'ordre 1 non-linéaires à variables séparables</u> : soit deux intervalles I et J, deux fonctions $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I et J et le problème de Cauchy : (C) : $\begin{cases} y' = g(x) \times h(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

L'unique solution de (C) est la fonction constante définie sur I par $x \mapsto y_0$ si et seulement si $h(y_0) = 0$.
De plus si $h(y_0) \neq 0$ alors l'unique solution de (C) est une fonction à image dans un intervalle contenant y_0 mais ne contenant pas de réel k tel que $h(k) = 0$.

Démonstration : les solutions étant des fonctions dérivables, donc continues, l'image de l'intervalle I par une fonction solution de (E) est un intervalle.
Supposons par l'absurde qu'une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ soit non-constante, solution de (E) et qu'il existe $x_0 \in \mathrm{I}$ tel que

$h(f(x_0))=0$ alors la fonction f serait solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} y'=g(x)\times h(y) \\ y(x_0)=y_i \end{cases}$ or le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que l'unique solution maximale est la fonction constante définie sur I par $x\mapsto y_i$ donc f est une fonction constante sur I ce qui contredit les hypothèses de départ.

Notation y comme fonction de x	Notation différentielle
(C) : $\begin{cases} y'(x)=g(x)\times h(y(x)) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ Si $h(y_0)\neq 0$ alors la solution y de (C) vérifie $\forall x\in \mathrm{I}$, $h(y(x))\neq 0$ Dans ce cas : (C) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \dfrac{y'(x)}{h(y(x))}=g(x) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ Soit deux réels k et c telles que : $\begin{cases} h(k)=h(c)=0 \\ c<y_0<k \\ \forall\, y\in]c;k[, h(y)\neq 0 \end{cases}$ En notant la fonction $a:u\mapsto \dfrac{1}{h(u)}$ définie sur $]c;k[$, on a : $(\mathrm{C})\Leftrightarrow \begin{cases} y'(x)\times a(y(x))=g(x) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ Soit A une primitive de la fonction a sur l'intervalle $]c;k[$, et G une primitive de la fonction g sur I : $\forall x\in \mathrm{I}, \mathrm{A}(y(x))=\mathrm{G}(x)+y_0-\mathrm{G}(x_0)$ Or $\forall u\in]c;k[$, $h(u)\neq 0$ donc $\mathrm{A}'(u)=a(u)\neq 0$ Ainsi, A' étant une fonction continue sur $]c;k[$ ne s'annulant pas sur $]c;k[$, A' est de signe constant sur $]c;k[$. Ainsi la fonction A est continue et strictement monotone sur $]c;k[$, elle réalise donc une bijection de l'intervalle $]c;k[$ sur l'intervalle . $\mathrm{A}(]c;k[)$. Ainsi, $\forall x\in \mathrm{I}$, $y(x)=\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{G}(x)+y_0-\mathrm{G}(x_0))$	(E) : $dy=g(x)h(y)dx$ si $h(y)\neq 0$ alors : $\dfrac{1}{h(y)}dy=g(x)dx$ En intégrant cette égalité par rapport à x on a : $\displaystyle\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{h(u)}\mathrm{d}u=\int_{x_0}^{x} g(v)\mathrm{d}v$ En effet, en posant $u=y(t)$ on a $du=y'(t)dt$ $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{h(y(t))}\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x} g(v)\mathrm{d}v$ Dans la pratique on note : $\displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(u)}\mathrm{d}u=\int_{x_0}^{x} g(v)\mathrm{d}v$ où y est une fonction de x à déterminer.

Exemple : (E) : $y'=y^2x$

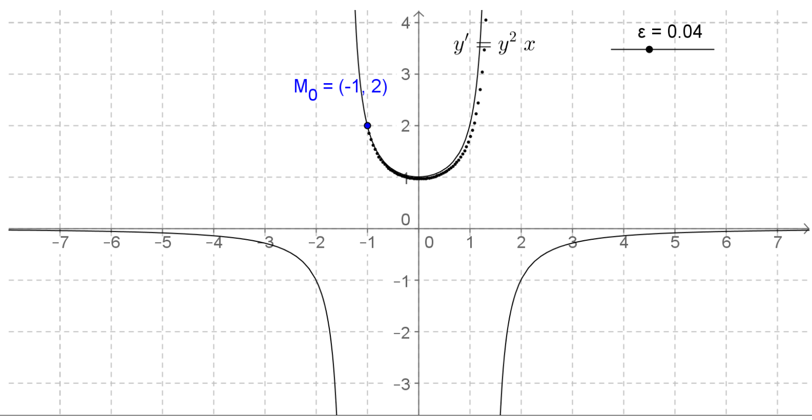
S'il existe $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $y(x_0)=0$ alors ...

S'il existe $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $y(x_0)\neq 0$ alors...

Dans ce cas (E) devient : $\dfrac{y'}{y^2}=x \;\Rightarrow\; \exists k\in\mathbb{R}$ tel que : $-\dfrac{1}{y}=\dfrac{x^2}{2}+k$

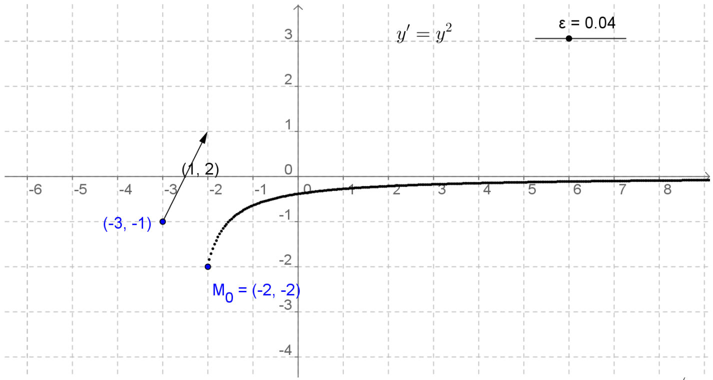
Donc pour $x^2\neq -2k$ on a : $y=-\dfrac{1}{\dfrac{x^2}{2}+k}=-\dfrac{2}{x^2+2k}$

Ainsi pour $y_0\neq 0$ le problème de Cauchy $\begin{cases} y'=y^2x \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ admet pour solutions maximales...

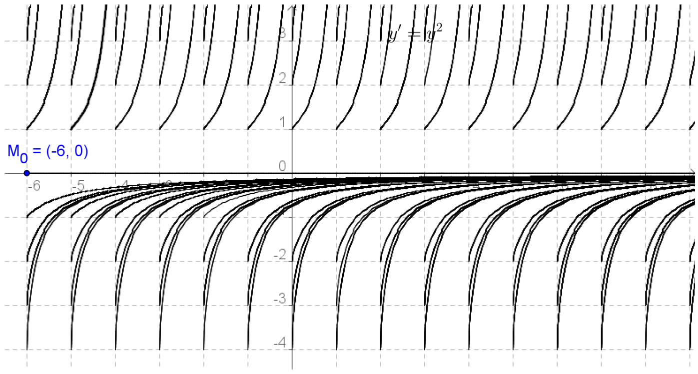


<u>Cas particulier des équations différentielles incomplètes</u> : soit J un intervalle réel, et $h:\mathrm{J}\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur J alors l'équation différentielle linéaire $y'=h(y)$ est dite incomplète.

Exemple : l'équation différentielle $y'=y^2$ ...



Remarque : le champ de vecteurs considéré est indépendant de x , donc dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les courbes intégrales sont invariantes par translation de vecteur colinéaire au vecteur $\vec{i}$.



<u>Définition d'un système autonome de deux équations différentielles du premier ordre</u> : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$ et $\psi:\Omega\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues sur Ω et le système différentiel $(S):\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\varphi(x;y)\\ \dfrac{dy}{dt}=\psi(x;y)\end{cases}$

Le système (S) est un système autonome de deux équations différentielles du premier ordre.
Soit I un intervalle, une solution de (S) sur I est un couple de fonctions $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ dérivables sur I telles que : $\forall t\in\mathrm{I}$, $\begin{cases}(f(t);g(t))\in\Omega\\ f'(t)=\varphi(f(t);g(t))\\ g'(t)=\psi(f(t);g(t))\end{cases}$

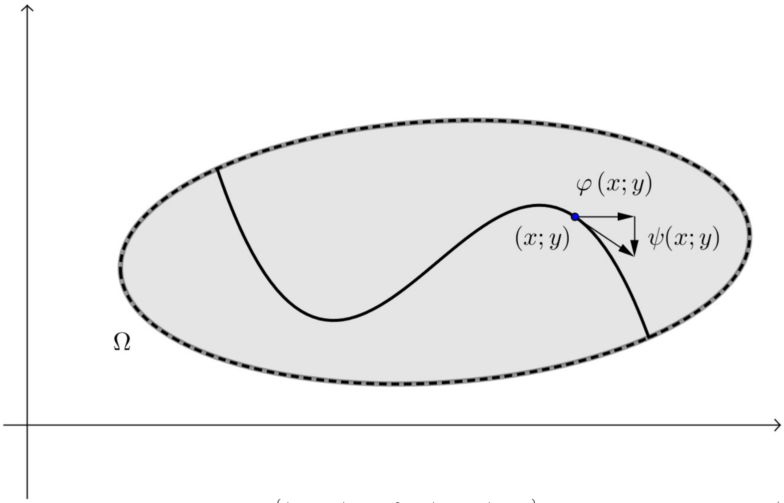
On appelle alors trajectoire la courbe paramétrée $\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$ pour $t\in\mathrm{I}$.

Remarque : le qualificatif « autonome » désigne le fait que les variations $\dfrac{dx}{dt}$ et $\dfrac{dy}{dt}$ des trajectoires ne dépendent pas de t mais uniquement de la position $(x;y)$.

En notant $\begin{cases}\mathrm{X}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\\ \quad t\mapsto\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}\end{cases}$ et $\begin{matrix}\phi:\Omega\to\mathbb{R}^2\\ \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\varphi(x;y)\\ \psi(x;y)\end{pmatrix}\end{matrix}$ le système différentiel (S) devient : $\mathrm{X}'=\phi(\mathrm{X})$

Ainsi ϕ est un champ de vecteurs vitesses indépendant du temps.

En particulier pour $(x_0;y_0)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases}\varphi(x_0;y_0)=0\\ \psi(x_0;y_0)=0\end{cases}$, la fonction constante $t\mapsto(x_0;y_0)$ est une solution de (S).



Lorsqu'une trajectoire est incluse dans l'ouvert $\Omega\backslash\{(x;y)\in\mathbb{R}^2|\varphi(x;y)>0\}$, la fonction $t\mapsto x(t)$ est continue et strictement croissante donc la trajectoire est parcourue « vers la droite » et la fonction y peut être considérée comme une fonction de x .
Lorsqu'une trajectoire est incluse dans l'ouvert $\Omega\backslash\{(x;y)\in\mathbb{R}^2|\varphi(x;y)<0\}$, la fonction $t\mapsto x(t)$ est continue et strictement décroissante donc la trajectoire est parcourue « vers la gauche » et la fonction y peut être considérée comme une fonction de x :

Dans ces deux cas la fonction $x\mapsto t(x)$ existe et $\dfrac{d\,(y(t(x)))}{dx}(x_0)=\dfrac{dt}{dx}(x_0)\times\dfrac{dy}{dt}(t(x_0))$

La dérivée d'une fonction réciproque, en notant $t(x_0)=t_0$, assure : $\dfrac{dt}{dx}(x_0)=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}(t_0)}$

$$\text{Donc : } \frac{dy}{dx}(x_0)=\frac{dy}{dt}(t_0)\times\frac{dt}{dx}(x_0)=\frac{\dfrac{dy}{dt}(t_0)}{\dfrac{dx}{dt}(t_0)}$$

Ainsi, une trajectoire incluse dans l'ouvert $\Omega\backslash\{(x;y)\in\mathbb{R}^2|\varphi(x;y)\neq0\}$ est la courbe représentative d'une fonction solution de l'équation différentielle d'ordre 1 :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi(x;y)}{\varphi(x;y)}$$

Exemple :