Équation linéaire en dimension finie : pivot de Gauss et théorème du rang.

Position du problème

Système d'équations linéaires

Soit $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}\in\mathrm{K}^{nm}$, $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathrm{K}^n$ et le système d'équations linéaires d'inconnues $x_1,\dots,x_m$:

$$(\mathrm{S}):\begin{cases} a_{1,1}x_1+ & \dots & +a_{1,m}x_m= & y_1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n,1}x_1+ & \dots & +a_{n,m}x_m= & y_n\end{cases}$$

L'objectif est de déterminer l'ensemble des m-uplets solutions des n équations. Cet objectif est atteint au terme de deux phases :

1) Phase d'échelonnement permettant d'obtenir, par opérations inversibles sur les lignes, un système échelonné équivalent à (S)

2) Phase de remontée permettant d'obtenir, par substitutions successives, l'expression des m_uplets solutions du système (S)

Application linéaire sous-jacente

Soit E un K_espace vectoriel de dimension m et F un K_espace vectoriel de dimension n.
On considère $f\in\mathrm{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ et $v\in\mathrm{F}$.
Soit $\mathrm{B_E}=(\mathrm{e}_1;\dots;\mathrm{e}_m)$ une base de E et $\mathrm{B_F}=(f_1;\dots;f_n)$ une base de F.
Soit $\mathrm{A}=\underset{\mathrm{B_E},\mathrm{B_F}}{Mat}(f)\in\mathrm{M}_{n,m}(\mathrm{K})$ i.e. $\mathrm{A}=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ et $\forall\, j\in[\![1;m]\!]$, $f(\mathrm{e}_j)=a_{1,j}f_1+\dots+a_{n,j}f_n$

$\mathrm{X}=[u]_{\mathrm{B_E}}$ i.e. $\mathrm{X}=(x_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ et $u=x_1\mathrm{e}_1+\dots+x_m\mathrm{e}_m$

$\mathrm{Y}=[v]_{\mathrm{B_F}}$ i.e. $\mathrm{Y}=(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $v=y_1f_1+\dots+y_nf_n$

$$f(u)=v \;\Leftrightarrow\; \mathrm{AX}=\mathrm{Y} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,m}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

L'objectif est de déterminer les vecteurs $u\in\mathrm{E}$ tels que : $\boxed{f(u)=v}$.

Échelonnement

Système d'équations linéaires

Deux types d'opérations sur les lignes sont utilisables :

Opération	Réciproque
Interversion : $\mathrm{L}_i\leftrightarrow\mathrm{L}_j$	$\mathrm{L}_i\leftrightarrow\mathrm{L}_j$
Combinaison linéaire : $\alpha\in\mathrm{K}$, $\mathrm{L}_i\leftarrow\mathrm{L}_i+\alpha\,\mathrm{L}_j$	$\mathrm{L}_i\leftarrow\mathrm{L}_i-\alpha\,\mathrm{L}_j$

Choix du pivot	Élimination de l'inconnue sous le pivot
Trouver un coefficient $a_{i;j}$ non nul appelé pivot. Par permutation de lignes du type $\mathrm{L}_1\leftrightarrow L_i$ et éventuelle permutation des inconnues, placer ce coefficient en haut à gauche du système.	Dans les lignes sous le pivot, faire disparaître la première inconnue à l'aide de combinaisons linéaires du type $\mathrm{L}_k\leftarrow\mathrm{L}_k+\alpha\,\mathrm{L}_1$ pour $k>1$. $(\mathrm{S})\Leftrightarrow\begin{cases} a_{1,1}^{(1)}x_1+ & a_{1,2}^{(1)}x_2+ & \dots & +a_{1,m}^{(1)}x_m= & y_1^{(1)}\\ & a_{2,2}^{(1)}x_2+ & \dots & +a_{2,m}^{(1)}x_m= & y_2^{(1)}\\ & \vdots & & \vdots & \vdots\\ & a_{n,2}^{(1)}x_2+ & \dots & +a_{n,m}^{(1)}x_m= & y_n^{(1)}\end{cases}$
Le procédé est réitéré sur le sous-système, le nouveau pivot est donc placé sur la ligne L_2.	Les combinaisons linéaires sont du type $\mathrm{L}_k\leftarrow\mathrm{L}_k+\alpha\,\mathrm{L}_2$ pour $k>2$. ...

Ce procédé est réitéré jusqu'à ce qu'il n'existe plus aucun pivot non nul dans le sous-système considéré.
Ainsi, à l'issue de r étapes $(r\leqslant min(m;n))$ on obtient :

Application linéaire sous-jacente

$$\mathrm{P}_{i;j}\overset{\text{def}}{=}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccccc} & & & \mathrm{C}_j & & & & \mathrm{C}_i & & & \\ & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots\\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & & & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & & & \vdots\\ \vdots & & & \vdots & 1 & \ddots & & 0 & & & \vdots\\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & \vdots\\ \vdots & & & 0 & & \ddots & 1 & \vdots & & & \vdots\\ \vdots & & & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & & & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow\mathrm{L}_j\\ \\ \\ \\ \leftarrow\mathrm{L}_i\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\mathrm{T}_{i;j}(\alpha)\overset{\text{def}}{=}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccccc} & & & \mathrm{C}_j & & & & & & & \\ & & & \downarrow & & & & & & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\ 0 & \ddots & & & & & & & & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & & & & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots\\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots\\ \vdots & & & & & \ddots & 1 & & & & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & & & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow\mathrm{L}_i\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Opérations sur les lignes :
L'interversion de deux lignes s'obtient par multiplication à gauche par une matrice de permutation appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ du type $\mathrm{P}_{i;j}$.
La combinaison linéaire de deux lignes s'obtient par multiplication à gauche par une matrice de transvection appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ du type : $\mathrm{T}_{i;j}(\alpha)$.

Opérations sur les colonnes :
L'interversion de deux colonnes s'obtient par multiplication à droite par une matrice de permutation appartenant à $\mathrm{GL}_m(\mathrm{K})$ du type $\mathrm{P}_{i;j}$.

Le procédé d'échelonnement décrit sur le système linéaire peut ainsi être appliqué sur la matrice A jusqu'à l'obtention d'une matrice échelonnée.

Il existe une matrice G $\in\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ produit de matrices de permutations et de transvections et il existe une matrice D $\in\mathrm{GL}_m(\mathrm{K})$ produit de matrices de permutations telles que la matrice GAD soit échelonnée :

$$(\mathrm{S})\Leftrightarrow\begin{cases} a_{1,1}^{(1)}x_1+ & \dots & \dots & \dots & +a_{1,m}^{(1)}x_m & =y_1^{(1)}\\ & \ddots & & & \vdots & \vdots\\ & & a_{r,r}^{(r)}x_r+ & \dots & +a_{r,m}^{(r)}x_m & =y_r^{(r)}\\ & & & & 0 & =y_{r+1}^{(r)}\\ & & & & \vdots & \vdots\\ & & & & 0 & =y_n^{(r)}\end{cases}$$

$$\forall i\in[\![1;r]\!],\ a_{i,i}^{(i)}\neq 0\ \text{ et GAD}=\begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & \dots & a_{1,r}^{(1)} & \overbrace{a_{1,r+1}^{(1)} \quad \dots \quad a_{1,m}^{(1)}}^{dim(\mathrm{Ker}\,f)}\\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \vdots & \ddots & a_{r,r}^{(r)} & a_{r,r+1}^{(r)} \quad \dots \quad a_{r,m}^{(r)}\\ \vdots & & 0 & \dots \quad \dots \quad 0\\ \vdots & & & \qquad\qquad \vdots\\ 0 & \dots & \dots & \dots \quad \dots \quad 0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right\} r=rg(f)\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Remontée

► Si $n=r=m$ alors le système (S) est un système de Cramer :

$$(\mathrm{S})\Leftrightarrow\begin{cases} a_{1,1}^{(1)}x_1+ & \dots & +a_{1,m}^{(1)}x_m & =y_1^{(1)}\\ & \ddots & \vdots & \vdots\\ & & a_{r,r}^{(r)}x_m & =y_r^{(r)}\end{cases}$$

Le système (S) admet un unique m_uplet solution obtenu par substitutions successives.

► Si $r<n$ alors les lignes L_{r+1} à L_n sont incohérentes ou inutiles.

S'il existe un entier $i\geqslant r+1$ tel que $y_i^{(r)}\neq 0$ alors le système est dit incohérent et il n'admet aucun m_uplet solution.

Au contraire, si pour tout un entier $i\geqslant r+1$, $y_i^{(r)}=0$ alors la résolution de (S) se ramène au cas $n=r<m$.

► Si $n=r<m$ alors $(\mathrm{S})\Leftrightarrow\begin{cases} a_{1,1}^{(1)}x_1+ & \dots & \dots & \dots & +a_{1,m}^{(1)}x_m & =y_1^{(1)}\\ & \ddots & & & \vdots & \vdots\\ & & a_{r,r}^{(r)}x_r+ & \dots & +a_{r,m}^{(r)}x_m & =y_r^{(r)}\end{cases}$

Les variables x_{r+1} à x_m sont alors utilisées comme des paramètres.

$$(\mathrm{S})\Leftrightarrow\begin{cases} a_{1,1}^{(1)}x_1+ & \dots & a_{1,r}^{(1)}x_r= & -a_{1,r+1}^{(1)}x_{r+1}-\dots & -a_{1,m}^{(1)}x_m & +y_1^{(1)}\\ & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ & & a_{r,r}^{(r)}x_r= & -a_{r,r+1}^{(r)}x_{r+1}-\dots & -a_{r,m}^{(r)}x_m & +y_r^{(r)}\end{cases}$$

Les m_uplets solutions du système (S) sont obtenus par substitutions successives. Il existe donc des scalaires $(b_{i;j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ r+1\leqslant j\leqslant m}}$ et $(c_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ tels que l'ensemble des m_uplets solutions du système (S) soit le sous-espace affine de dimension $m-r$ défini par :

$$\left\{\begin{pmatrix} b_{1,r+1}x_{r+1}+\dots+b_{1,m}x_m+\dots+c_1\\ \vdots\\ b_{r,r+1}x_{r+1}+\dots+b_{r,m}x_m+\dots+c_r\\ x_{r+1}\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m \middle| (x_{r+1};\dots;x_m)\in\mathbb{R}^{m-r}\right\}$$

Remarque : si les inconnues ont été permutées lors de l'échelonnement, l'ordre doit être rétabli dans les m_uplets solutions.

Les matrices G et D sont inversibles donc : GAD=A' $\Leftrightarrow$ $\mathrm{A}=\mathrm{G}^{-1}\mathrm{A}'\mathrm{D}^{-1}$

Ainsi $\mathrm{AX}=\mathrm{Y}\Leftrightarrow\mathrm{G}^{-1}\mathrm{A}'\mathrm{D}^{-1}\mathrm{X}=\mathrm{Y}\Leftrightarrow\mathrm{A}'\mathrm{D}^{-1}\mathrm{X}=\mathrm{GY}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{A}'\mathrm{X}'=\mathrm{Y}'\\ \mathrm{D}^{-1}\mathrm{X}=\mathrm{X}'\\ \mathrm{GY}=\mathrm{Y}'\end{cases}$

► Si $n=r=m$ alors $\mathrm{A}'\in\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ donc $\mathrm{A}\in\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ et $\mathrm{A}^{-1}=\mathrm{D}\,\mathrm{A}'^{-1}\mathrm{G}$

Ainsi f est un isomorphisme et $f(u)=v\Leftrightarrow u=f^{-1}(v)$

De plus $det(\mathrm{A})=\pm\prod_{i=1}^{n}a_{i,i}^{(i)}$ car $det(\mathrm{G})=\pm 1$ et $det(\mathrm{D})=\pm 1$ en fonction du nombre de permutations utilisées.

► Si $r<n$ alors $rg(f)<dim(\mathrm{F})$ donc f n'est pas surjective.

Ainsi, si $v\notin\mathrm{Im}(f)$ alors l'équation $f(u)=v$ n'admet pas de vecteur de E solution.

Au contraire, si $v\in\mathrm{Im}(f)$ alors il existe $u_0\in\mathrm{E}$ tel que $f(u_0)=v$ donc

$$f(u)=v\Leftrightarrow f(u-u_0)=0_{\mathrm{F}}\Leftrightarrow u-u_0\in\mathrm{Ker}\,f$$

► Si $r<m$ alors $\mathrm{Ker}\,f\neq\{0_{\mathrm{E}}\}$:

$$\mathrm{AX}=0_{\mathbb{R}^n}\Leftrightarrow\mathrm{A}'\mathrm{X}'=0_{\mathbb{R}^n}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & \dots & \dots & a_{1,r}^{(1)}\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & a_{r,r}^{(r)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_r\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} a_{1,r+1}^{(1)} & \dots & a_{1,m}^{(1)}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{r,r+1}^{(r)} & \dots & a_{r,m}^{(r)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_{r+1}\\ \vdots\\ x'_m\end{pmatrix}$$

Alors en notant : $-\begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & \dots & \dots & a_{1,r}^{(1)}\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & a_{r,r}^{(r)}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_{1,r+1}^{(1)} & \dots & a_{1,m}^{(1)}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{r,r+1}^{(r)} & \dots & a_{r,m}^{(r)}\end{pmatrix}\overset{\mathrm{def}}{=}\begin{pmatrix} b_{1,r+1} & \dots & b_{1,m}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{r,r+1} & \dots & b_{r,m}\end{pmatrix}$

$$\mathrm{AX}=0_{\mathbb{R}^n}\Leftrightarrow\mathrm{X}\in Vect\underbrace{\left(\mathrm{D}\begin{pmatrix}b_{1,r+1}\\ \vdots\\ b_{r,r+1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix};\dots;\mathrm{D}\begin{pmatrix}b_{1,m}\\ \vdots\\ b_{r,m}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right)}_{m-r\ \text{ vecteurs libres donc }\ dim(\mathrm{Ker}\,f)=m-r}\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\ m\ \text{ composantes}$$