Trigonométrie

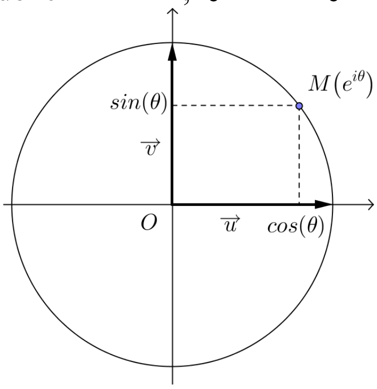
Les méthodes pour retrouver ces formules sont plus importantes que les formules elles-mêmes.

I. Opérations sur les arguments

Périodicité :

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $e^{i2k\pi} = 1^k = 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{i(x+2k\pi)} = e^{ix}$

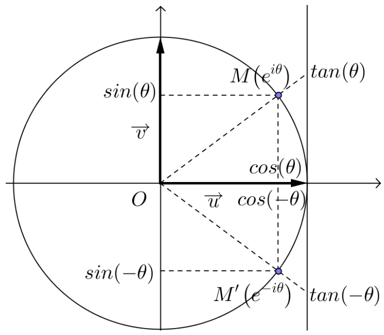
$$\begin{cases} \cos(x+2k\pi) = \cos(x) \\ \sin(x+2k\pi) = \sin(x) \end{cases}$$



Parité :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-ix} = \overline{e^{ix}} \Rightarrow \begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$

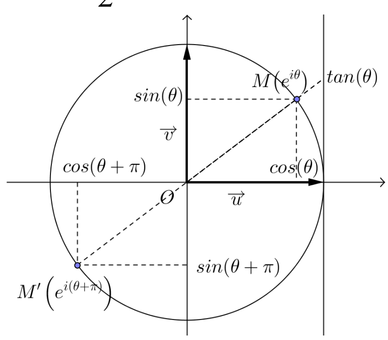
Si $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$ alors $\tan(-x) = -\tan(x)$



$\forall k \in \mathbb{Z}$, $e^{ik\pi} = (-1)^k \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $e^{i(x+k\pi)} = (-1)^k e^{ix}$

$$\begin{cases} \cos(x+k\pi) = (-1)^k \cos(x) \\ \sin(x+k\pi) = (-1)^k \sin(x) \end{cases}$$

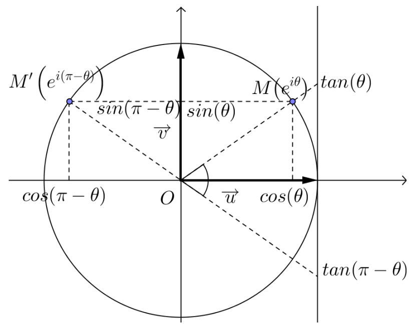
$\forall k \in \mathbb{Z}$ si $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$ alors $\tan(x+k\pi) = \tan(x)$



$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{i(\pi-x)} = -e^{-ix} = -\overline{e^{ix}}$

$$\begin{cases} \cos(\pi-x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi-x) = \sin(x) \end{cases}$$

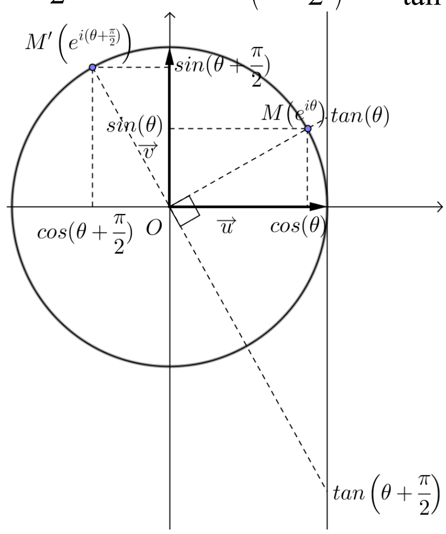
Si $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$ alors $\tan(\pi-x) = -\tan(x)$



$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{i\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = ie^{ix}$

$$\begin{cases} \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \end{cases}$$

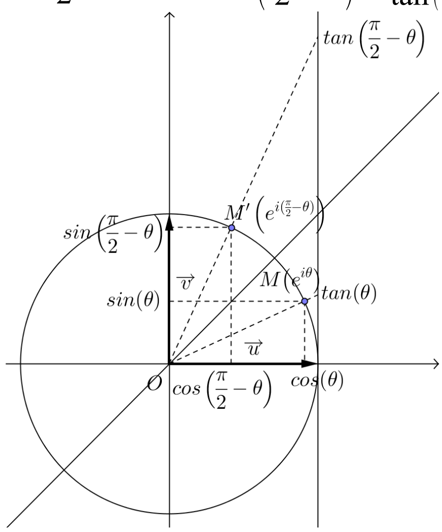
Si $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$ alors $\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$



$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = i\,\overline{e^{ix}}$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x) \end{cases}$$

Si $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$ alors $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$



Formules d'addition, et de duplication :

$$e^{i(a+b)}=e^{ia}\times e^{ib} \Rightarrow \begin{cases}\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\\ \sin(a+b)=\cos(a)\sin(b)+\sin(a)\cos(b)\end{cases}$$

$$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1$$
$$\sin(2a)=2\cos(a)\sin(a)$$

$$\tan(a+b)=\frac{\dfrac{\cos(a)\sin(b)+\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)}}{\dfrac{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

$$\tan(2a)=\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

Formules de « l'angle moyen » :

$$\cos(a)+\cos(b)=\mathrm{Re}(e^{ia}+e^{ib})=\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}+e^{-i\frac{a-b}{2}}\right)\right)=\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{a+b}{2}}2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right)=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos(a)-\cos(b)=\mathrm{Re}(e^{ia}-e^{ib})=\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}-e^{-i\frac{a-b}{2}}\right)\right)=\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{a+b}{2}}2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\right)=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

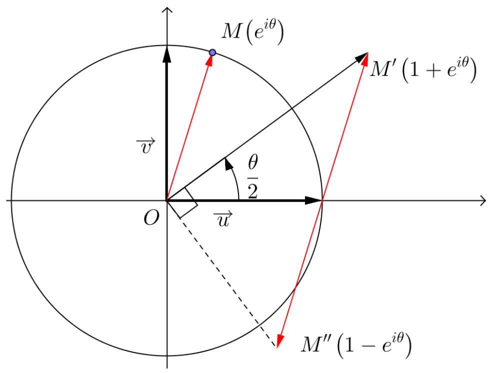
$$\sin(a)+\sin(b)=\mathrm{Im}(e^{ia}+e^{ib})=\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}+e^{-i\frac{a-b}{2}}\right)\right)=\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{a+b}{2}}2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right)=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin(a)+\sin(b)=\mathrm{Im}(e^{ia}+e^{ib})=\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}-e^{-i\frac{a-b}{2}}\right)\right)=\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{a+b}{2}}2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\right)=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Formules de l'angle moitié :

$$1+e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \begin{cases}1+\cos(\theta)=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ \sin(\theta)=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{cases}$$

$$1-e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \begin{cases}1-\cos(\theta)=2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ \sin(\theta)=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{cases}$$



Formules de « la tangente de l'angle moitié » : $e^{i\theta}=\dfrac{e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{e^{-\frac{i\theta}{2}}}=\dfrac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\dfrac{1+i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1-i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ si $\dfrac{\theta}{2}\neq\dfrac{\pi}{2}[\pi]$

$$\cos(\theta)=\frac{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \text{ et } \sin(\theta)=\frac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \text{ et } \tan(\theta)=\frac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Développements : Formule de Moivre et du binôme de Newton

$$e^{in\theta}=(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n=\sum_{k=0}^{n}(i)^{n-k}\binom{n}{k}\cos^k(\theta)\sin^{n-k}(\theta) \text{ ainsi } \begin{cases}\cos(n\theta)=\Re e\left((\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n\right)\\ \sin(n\theta)=\Im m\left((\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n\right)\end{cases}$$

II. Opérations sur les fonctions trigonométriques

Liens entre les fonctions trigonométriques :

$\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ et si $\theta\neq\dfrac{\pi}{2}[\pi]$ alors $\tan(\theta)=\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ .donc $\tan^2\theta=\dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}-1$

Formules de linéarisation : Formules d'Euler

$$\cos(a)\cos(b)=\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\times\frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2}=\frac{e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}+e^{i(a-b)}+e^{-i(a-b)}}{4}=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$$

$$\cos(a)\sin(b)=\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\times\frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i}=\frac{e^{i(a+b)}-e^{-i(a+b)}+e^{i(b-a)}-e^{-i(b-a)}}{4i}=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(b-a))$$

$$\sin(a)\sin(b)=\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}\times\frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i}=-\frac{e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}-e^{i(a-b)}-e^{-i(a-b)}}{4}=\frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$$

$$\cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\Rightarrow(\cos(\theta))^n=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta}e^{-i(n-k)\theta}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)\theta}$$

$(\cos(\theta))^n$ est combinaison linéaire de $\cos(n\theta)$, $\cos((n-2)\theta)$;... $\begin{cases}\cos(\theta) \text{ si } n \text{ est impaire}\\ 1 \text{ si } n \text{ est paire}\end{cases}$

$$\sin(\theta)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\Rightarrow(\sin(\theta))^n=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^n=\frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta}(-1)^{n-k}e^{-i(n-k)\theta}=\frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)\theta}$$

$(\sin(\theta))^n$ est combinaison linéaire de $\begin{cases}\text{si } n \text{ est pair : } \cos(n\theta);\ \cos((n-2)\theta);\ \cos((n-4)\theta)\ldots;1\\ \text{si } n \text{ est impaire : } \sin(n\theta);\ \sin((n-2)\theta);\ \sin((n-4)\theta)\ldots;\sin(\theta)\end{cases}$

Cas particuliers : $\cos^2(\theta)=\dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$; $\sin^2(\theta)=\dfrac{1-2\cos(\theta)}{2}$ et $\tan^2(\theta)=\dfrac{1-2\cos(\theta)}{1+2\cos(\theta)}$

<u>Formules de factorisation</u>

$a\cos(\theta)+b\sin(\theta)=\Re e\left(e^{i\theta}(a-ib)\right)$ ainsi, pour $a-ib=\rho e^{i\alpha}$: $a\cos(\theta)+b\sin(\theta)=\Re e\left(\rho e^{i(\theta+\alpha)}\right)=\rho\cos(\theta+\alpha)$

$$e^{ia}+e^{ib}=e^{i\frac{a}{2}}e^{i\frac{b}{2}}\left(e^{\frac{i(a-b)}{2}}+e^{-\frac{i(a-b)}{2}}\right)=e^{i\frac{a+b}{2}}2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\cos(a)+\cos(b)=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ \sin(a)+\sin(b)=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\end{cases}$$

$$e^{ia}-e^{ib}=e^{i\frac{a}{2}}e^{i\frac{b}{2}}\left(e^{\frac{i(a-b)}{2}}-e^{-\frac{i(a-b)}{2}}\right)=e^{i\frac{a+b}{2}}2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\cos(a)-\cos(b)=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ \sin(a)-\sin(b)=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\end{cases}$$

si $\theta\neq0\ [2\pi]$ alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}=\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}=\frac{e^{i\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}\left(e^{-i\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}-e^{i\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}\right)}{e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\theta}{2}\right)}-e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)}=e^{i\left(\frac{n}{2}\theta\right)}\frac{-2i\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=\frac{\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)=\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

Si $a\neq\frac{\pi}{2}[\pi]$ et $b\neq\frac{\pi}{2}[\pi]$ alors $\tan(a)+\tan(b)=\dfrac{\sin(a)}{\cos(a)}+\dfrac{\sin(b)}{\cos(b)}=\dfrac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$

<u>Dérivées</u> : $\forall x\in\mathbb{R}$, $(e^{ix})'=i\,e^{ix}=e^{i\frac{\pi}{2}}e^{ix}=e^{i\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\Rightarrow\begin{cases}\cos'(x)=-\sin(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin'(x)=\cos(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$

$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x)=\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'=\dfrac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}=\dfrac{1}{\cos^2x}=1+\tan^2x$

III. Équations trigonométriques

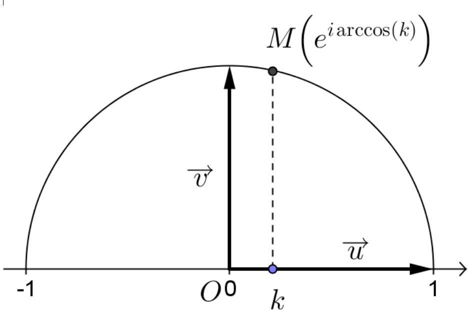
$\cos(a)=\cos(b) \Leftrightarrow a=\pm b\,[2\pi]$

$\sin(a)=\sin(b) \Leftrightarrow (a=b\,[2\pi]\ ou\ a=\pi-b\,[2\pi])$

$\tan(a)=\tan(b) \Leftrightarrow a=b\,[\pi]$

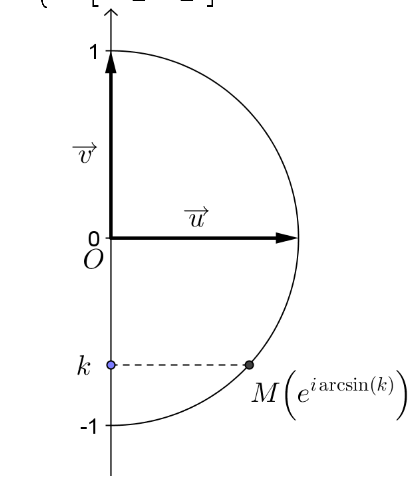
$$\begin{array}{ccc} [0;\pi] & \rightarrow & [-1;1] \\ \theta & \mapsto & \cos(\theta) \\ \arccos(k) & \leftarrow & k \end{array}$$

$$\begin{cases} x=\cos(\theta) \\ \theta\in[0;\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arccos(x)=\theta \\ x\in[-1;1] \end{cases}$$



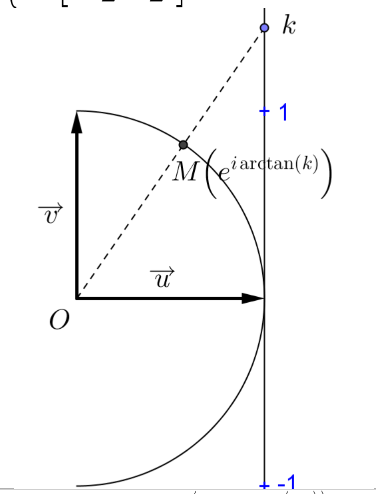
$$\begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] & \rightarrow & [-1;1] \\ \theta & \mapsto & \sin(\theta) \\ \arcsin(k) & \leftarrow & k \end{array}$$

$$\begin{cases} x=\sin(\theta) \\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arcsin(x)=\theta \\ x\in[-1;1] \end{cases}$$



$$\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & \tan(\theta) \\ \arctan(k) & \leftarrow & k \end{array}$$

$$\begin{cases} x=\tan(\theta) \\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \arctan(x)=\theta$$



$\forall x\in[-1;1],\ \cos(\arccos(x))=x$

Soit $x\in[(2k-1)\pi;(2k+1)\pi]$ avec $k\in\mathbb{Z}$ alors

$\arccos(\cos(x))=|x-2k\pi|$

$\forall x\in[-1;1],\ \sin(\arcsin(x))=x$

Soit $x\in\mathbb{R}$, si

$x\in\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right]$ avec $k\in\mathbb{Z}$

alors $\arcsin(\sin(x))=(-1)^k(x-k\pi)$

$\forall x\in\mathbb{R},\ \tan(\arctan(x))=x$

Soit $x\in\mathbb{R}$, si

$x\in\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ avec $k\in\mathbb{Z}$

alors $\arctan(\tan(x))=x-k\pi$

$$\forall x\in I,\ f\circ f^{-1}(x)=x \ \Rightarrow \text{ si } f'\left(f^{-1}(x)\right)\neq 0 \text{ alors } \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

$\forall x\in]-1;1[$,

$$\arccos'(x)=\frac{1}{-\sin(\arccos(x))}$$

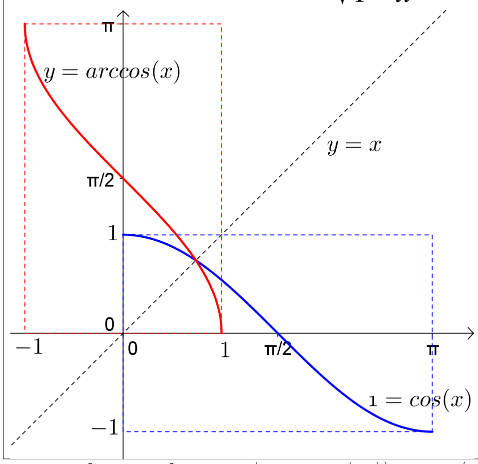
$\sin^2(\arccos(x))=1-\cos^2(\arccos(x))$

or $\arccos(x)\in[0;\pi]$ donc

$\sin(\arccos(x))\geqslant 0$ d'où :

$\sin(\arccos(x))=\sqrt{1-x^2}$

ainsi : $\arccos'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



$\forall x\in]-1;1[$,

$$\arcsin'(x)=\frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

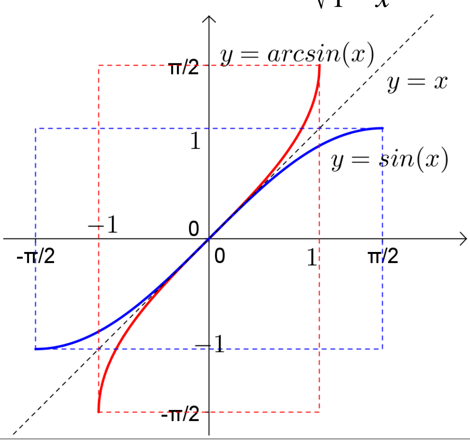
$\cos^2(\arcsin(x))=1-\sin^2(\arcsin(x))$

or $\arcsin(x)\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ donc

$\cos(\arcsin(x))\geqslant 0$ d'où :

$\cos(\arcsin(x))=\sqrt{1-x^2}$

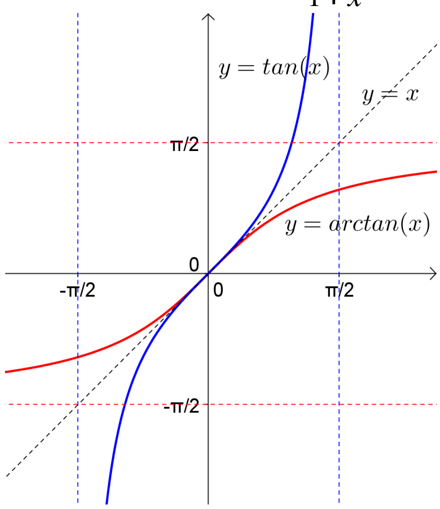
ainsi : $\arcsin'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



$\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\arctan'(x)=\frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))}$$

donc : $\arctan'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$



$\forall x\in[-1;1],\ \cos(\arccos(x))=\sin(\arcsin(x))$ or $\forall\theta\in\mathbb{R}$, or $\sin(\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$, donc

$\cos(\arccos(x))=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)\right)$ or $\begin{cases} \arccos(x)\in[0;\pi] \\ \frac{\pi}{2}-\arcsin(x)\in[0;\pi] \end{cases}$, ainsi $\arccos(x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)$