Espaces vectoriels de dimension finie et matrices

I. Matrice d'un endomorphisme dans une base donnée

K_espace vectoriel E de dimension n	Notation matricielle	Calculs matriciels	Espace euclidien $(E;\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$
Soit $B=(\vec{e}_1;\dots;\vec{e}_n)$ une base de E et $\vec{v}$ un vecteur de E. Si $\boxed{\vec{v}=x_1\vec{e}_1+\dots+x_n\vec{e}_n}$ avec $(x_1;\dots;x_n)\in K^n$ alors : $\vec{v}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}_B$	$\boxed{Mat_B(\vec{v})\overset{def}{=}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in M_{n,1}(K)}$ Ex : $Mat_B(\vec{e}_1)=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$;...; $Mat_B(\vec{e}_n)=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$	$\boxed{Mat_B(\vec{v}+\vec{v}')=Mat_B(\vec{v})+Mat_B(\vec{v}')}$ $\boxed{\forall\lambda\in K,\ Mat_B(\lambda\vec{v})=\lambda\, Mat_B(\vec{v})}$ $Mat_B(\vec{v})=x_1 Mat_B(\vec{e}_1)+\dots+x_n Mat_B(\vec{e}_n)$	$B=(\vec{e}_1;\dots;\vec{e}_n)$ une base <u>orthonormale</u> : $\boxed{Mat_B(\vec{v})=\begin{pmatrix}\langle\vec{v}\mid\vec{e}_1\rangle\\\vdots\\\langle\vec{v}\mid\vec{e}_n\rangle\end{pmatrix}}$ $\boxed{\langle\vec{v}\mid\vec{v}'\rangle=(Mat_B(\vec{v}))^T\times Mat_B(\vec{v}')}$
Soit $f\in L(E)$, et $\vec{v}=x_1\vec{e}_1+\dots+x_n\vec{e}_n$ $f(\vec{v})=x_1 f(\vec{e}_1)+\dots+x_n f(\vec{e}_n)$ $Im(f)\overset{def}{=}\{f(\vec{v})\mid\vec{v}\in E\}$ $\boxed{Im(f)=Vect(f(\vec{e}_1);\dots;f(\vec{e}_n))}$ $\boxed{rg(f)\overset{def}{=}dim(Im(f))}$ $\boxed{Ker(f)\overset{def}{=}\{\vec{v}\in E\mid f(\vec{v})=O_E\}}$	$\boxed{Mat_B(f)=\begin{pmatrix}a_{1,1}&\vdots&a_{1,n}\\\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n,1}&\vdots&a_{n,n}\end{pmatrix}\in M_n(K)}$ où $\forall j\in[\![1;n]\!]$ $\boxed{\begin{pmatrix}a_{1,j}\\\vdots\\a_{n,j}\end{pmatrix}\overset{def}{=}Mat_B(f(\vec{e}_j))}$ $\boxed{\vec{w}\in Im(f)\Leftrightarrow Mat_B(\vec{w})\in Im(Mat_B(f))}$ $\boxed{rg(f)=rg(Mat_B(f))}$ $\boxed{\vec{v}\in Ker(f)\Leftrightarrow Mat_B(\vec{v})\in Ker(Mat_B(f))}$	$Mat_B(f(\vec{v}))=x_1 Mat_B f(\vec{e}_1)+\dots+x_n Mat_B(f(\vec{e}_n))$ $Mat_B(f(\vec{v}))=Mat_B(f)\times\begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}$ $\boxed{Mat_B(f(\vec{v}))=Mat_B(f)\times Mat_B(\vec{v})}$ En notant $X=Mat_B(\vec{v})$, $Y=Mat_B(f(\vec{v}))$ et $A=Mat_B(f)$ on a : $\boxed{Y=AX}$ Exemple : $Mat_B(f(\vec{e}_1))=Mat_B(f)\times\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$	$B=(\vec{e}_1;\dots;\vec{e}_n)$ une base <u>orthonormale</u> : $\boxed{Mat_B(f)=\begin{pmatrix}\langle f(\vec{e}_1)\mid\vec{e}_1\rangle&\dots&\langle f(\vec{e}_n)\mid\vec{e}_1\rangle\\\vdots&&\vdots\\\langle f(\vec{e}_1)\mid\vec{e}_n\rangle&\dots&\langle f(\vec{e}_n)\mid\vec{e}_n\rangle\end{pmatrix}}$ $\boxed{f\in O(E)\Leftrightarrow Mat_B(f)\in O(n)}$

II. Matrice de passage

Soient $B=(\vec{e}_1;\dots;\vec{e}_n)$ et $B'=(\vec{e'}_1;\dots;\vec{e'}_n)$ deux bases de E. Soit un vecteur $\vec{v}$ de E : $\vec{v}=x_1\vec{e}_1+\dots+x_n\vec{e}_n=x'_1\vec{e'}_1+\dots+x'_n\vec{e'}_n$ $\vec{v}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}_B$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'_1\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix}_{B'}$	$P_B^{B'}=\begin{pmatrix}p_{1,1}&\vdots&p_{n,1}\\\vdots&\vdots&\vdots\\p_{n,1}&\vdots&p_{n,n}\end{pmatrix}\in M_n(K)$ où $\forall j\in[\![1;n]\!]$, $\boxed{\begin{pmatrix}p_{1,j}\\\vdots\\p_{n,j}\end{pmatrix}\overset{def}{=}Mat_B(\vec{e'}_j)}$ i.e. $\boxed{P_B^{B'}=Mat_{B',B}(Id_E)}$ et $\boxed{(P_B^{B'})^{-1}=P_{B'}^{B}}$	$Mat_B(\vec{v})=x'_1 Mat_B(\vec{e'}_1)+\dots+x'_n Mat_B(\vec{e'}_n)$ $\boxed{Mat_B(\vec{v})=P_B^{B'}\times Mat_{B'}(\vec{v})}$ En notant $X=Mat_B(\vec{v})$, $X'=Mat_{B'}(\vec{v})$ et $P=P_B^{B'}$ on a : $\boxed{X=PX'}$ et $\boxed{X'=P^{-1}X}$ Exemple : $Mat_B(\vec{e'}_1)=P_B^{B'}\times\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$	Si B et B' sont deux bases <u>orthonormales</u> de E alors : $P_B^{B'}\in O(n)$ $\boxed{P_{B'}^{B}=(P_B^{B'})^T}$

III. Formule de changement de base pour un endomorphisme

$$Mat_{B'}(f(v))\xleftarrow{P_{B'}^{B}\times\dots}Mat_B(f(v))\xleftarrow{Mat_B(f)\times\dots}Mat_B(v)\xleftarrow{P_B^{B'}\times\dots}Mat_{B'}(v)$$

$$Mat_B{}'(f(v))=\underbrace{P_{B'}^{B}\underbrace{\left(Mat_B(f)\underbrace{\left(P_B^{B'}\times\underbrace{Mat_{B'}(v)}_{v\text{ dans }B'}\right)}_{v\text{ dans }B}\right)}_{f(v)\text{ dans }B}}_{f(v)\text{ dans }B'}\ \text{donc : }\boxed{Mat_{B'}(f)=P_{B'}^{B}\times Mat_B(f)\times P_B^{B'}}$$

Pour $X=Mat_B(\vec{v})$, $X'=Mat_{B'}(\vec{v})$ et $P=P_B^{B'}$: X=PX'

Pour $Y=Mat_B(f(\vec{v}))$, et $A=Mat_B(f)$: Y=AX

Pour $Y'=Mat_{B'}(f(\vec{v}))$: $Y'=P^{-1}Y$ d'où : $\boxed{Y'=P^{-1}APX'}$

Ainsi, pour $A'=Mat_{B'}(f)$: $\boxed{A'=P^{-1}AP}$ i.e. $\boxed{A=PA'P^{-1}}$