Opérations sur les développements limités en zéro.

Définition de la notation de Landau o et de $\underset{x\to0}{=}$:

$$\text{soit } n\in\mathbb{N},\ f(x)\underset{x\to0}{=}o(x^n)\Leftrightarrow \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}=0$$

Lien avec les équivalents : soit $k\in\mathbb{R}^*$, $f(x)\underset{x\to0}{=}k\,x^n+o(x^n)\Leftrightarrow f(x)\underset{x\to0}{\sim}k\,x^n$

Troncature : $p>n \Rightarrow x^p\underset{x\to0}{=}o(x^n)$

$$\left.\begin{matrix}p\geqslant n\\ f(x)\underset{x\to0}{=}o(x^p)\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(x)\underset{x\to0}{=}o(x^n) \text{ noté } o(x^p)\underset{x\to0}{=}o(x^n)$$

Addition :

$$\left.\begin{matrix}f(x)\underset{x\to0}{=}o(x^n)\\ g(x)\underset{x\to0}{=}o(x^p)\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(x)+g(x)\underset{x\to0}{=}o(x^{\min(p;n)}) \text{ noté } o(x^p)+o(x^n)\underset{x\to0}{=}o(x^{\min(p;n)})$$

Multiplication :

$$\left.\begin{matrix}k\in\mathbb{R}^*\\ f(x)\underset{x\to0}{=}o(x^n)\end{matrix}\right\}\Rightarrow k\times f(x)\underset{x\to0}{=}o(x^n) \text{ noté } k\times o(x^n)\underset{x\to0}{=}o(x^n)$$

$$f(x)\underset{x\to0}{=}o(x^n) \Rightarrow x^p f(x)\underset{x\to0}{=}o(x^{n+p}) \text{ noté } x^p\times o(x^n)\underset{x\to0}{=}o(x^{n+p})$$

$$\left.\begin{matrix}f(x)\underset{x\to0}{=}o(x^n)\\ g(x)\underset{x\to0}{=}o(x^p)\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(x)\times g(x)\underset{x\to0}{=}o(x^{n+p}) \text{ noté } o(x^p)\times o(x^n)\underset{x\to0}{=}o(x^{n+p})$$

Composition des développements limités :

$$\left.\begin{matrix}p>0\\ f(x)\underset{x\to0}{=}o(x^n)\end{matrix}\right\}\Rightarrow (f(x))^p\underset{x\to0}{=}o(x^{np}) \text{ noté } (o(x^n))^p\underset{x\to0}{=}o(x^{np})$$

$$\left.\begin{matrix}k\neq0\\ f(x)\underset{x\to0}{=}k\times x^n+o(x^n)\\ g(x)\underset{x\to0}{=}o(x)\end{matrix}\right\} \Rightarrow g(f(x))\underset{x\to0}{=}o(x^n) \text{ noté } o(k\times x^n+o(x^n))\underset{x\to0}{=}o(x^n)$$

Division : si $\alpha_p\neq0$ et $n\geqslant p$ alors

$$\frac{\mathrm{P}(x)}{\alpha_p x^p+\alpha_{p+1}x^{p+1}+\ldots+o(x^n)}\underset{x\to0}{=}\frac{\mathrm{P}(x)}{\alpha_p x^p}\times\frac{1}{1+\underbrace{\frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p}x+\ldots+o(x^{n-p})}_{\varepsilon}}$$

Il suffit d'utiliser la composition avec $\frac{1}{1+\varepsilon}\underset{\varepsilon\to0}{=}1-\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+(-1)^n\varepsilon^n+o(\varepsilon^n)$.

$$\left.\begin{matrix}f(x)\underset{x\to0}{=}o(x^n)\\ g(x)\underset{x\to0}{=}o(x^p)\end{matrix}\right\}\not\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}\underset{x\to0}{=}o(x^{n-p}) \text{ noté } \frac{o(x^n)}{o(x^p)}\underset{x\to0}{\neq}o(x^{n-p})$$

Intégration terme à terme :

$$f(x)\underset{x\to0}{=}o(x^n) \Rightarrow \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\underset{x\to0}{=}o(x^{n+1}) \text{ noté } \int_0^x o(t^n)\,\mathrm{d}t\underset{x\to0}{=}o(x^{n+1})$$

Pas de dérivation car $x\mapsto o(x^n)$ n'est pas nécessairement une fonction dérivable en 0.

Développement limité en un réel a: on pose $x=a+\varepsilon$ ainsi

$$f(a+\varepsilon)\underset{\varepsilon\to0}{=}o(\varepsilon^n) \Leftrightarrow f(x)\underset{x\to a}{=}o((x-a)^n)$$

Développement asymptotique : on pose $\frac{1}{x}=\varepsilon$ ainsi

$$f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\underset{\varepsilon\to0}{=}o(\varepsilon^n) \Leftrightarrow f(x)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)$$

Développement limité à deux variables en (0;0) :

$$\text{soit } n\in\mathbb{N},\ f(x,y)\underset{(x,y)\to(0,0)}{=}o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n\right)\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n}=0$$

Passage d'une à deux variables : $|x|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$ et $|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$ donc :

$$\text{soit } n\in\mathbb{N}^*,\ x^n\underset{(x,y)\to(0,0)}{=}o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{n-1}\right) \text{ et } y^n\underset{(x,y)\to(0,0)}{=}o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{n-1}\right)$$

$$\text{soit } (n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ x^n\times y^p\underset{(x,y)\to(0,0)}{=}o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{n+p-1}\right)$$

$$\left.\begin{matrix}p\geqslant n\\ f(x)\underset{x\to0}{=}o(x^p)\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(x)\underset{(x,y)\to(0,0)}{=}o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n\right) \text{ noté } o(x^p)\underset{(x,y)\to(0,0)}{=}o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n\right)$$

$$\left.\begin{matrix}p\geqslant n\\ \forall y\in\mathbb{R},\ f(x,y)\underset{x\to0}{=}o(x^p)\end{matrix}\right\}\not\Rightarrow f(x,y)\underset{(x,y)\to(0,0)}{=}o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n\right)$$

$$\left.\begin{matrix}p+q\geqslant n\\ f(x)\underset{x\to0}{=}o(x^p)\\ g(y)\underset{y\to0}{=}o(y^q)\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(x)\times g(y)\underset{(x,y)\to(0,0)}{=}o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n\right) \text{ noté}$$

$$o(x^p)\times o(y^q)\underset{(x,y)\to(0,0)}{=}o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n\right)$$

Les opérations s'effectuent comme pour une seule variable en notant $\varepsilon=\sqrt{x^2+y^2}$ et $\ldots\underset{\varepsilon\to0}{=}o(\varepsilon^n)$

Développement limité à 2 variables en $(a;b)$: on pose $(x,y)=(a+\varepsilon_1,b+\varepsilon_2)$ ainsi

$$f(a+\varepsilon_1,b+\varepsilon_2)\underset{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to(0,0)}{=}o\left(\left(\sqrt{(\varepsilon_1)^2+(\varepsilon_2)^2}\right)^n\right) \Leftrightarrow f(x,y)\underset{(x,y)\to(a,b)}{=}o\left(\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}\right)^n\right)$$

pycreach.free.fr