Opérations sur les développements limités en zéro.

Définition de la notation de Landau o et de $\underset{x\to 0}{=}$:

$$\text{soit } n\in\mathbb{N}\,,\ f(x)\underset{x\to 0}{=}o(x^n)\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=0$$

Lien avec les équivalents : soit $k\in\mathbb{R}^*$, $f(x)\underset{x\to 0}{=}k\,x^n+o(x^n)\Leftrightarrow f(x)\underset{x\to 0}{\sim}k\,x^n$

Troncature : si $p>n$ alors $x^p\underset{x\to 0}{=}o(x^n)$

Addition : $o(x^p)+o(x^n)\underset{x\to 0}{=}o(x^{min(p\,;n)})$

Multiplication : soit $k\in\mathbb{R}$, alors $k\times o(x^n)\underset{x\to 0}{=}o(x^n)$

$$x^p\times o(x^n)\underset{x\to 0}{=}o(x^{n+p})$$

$$o(x^p)\times o(x^n)\underset{x\to 0}{=}o(x^{n+p})$$

Composition des développements limités : $\left(o(x^n)\right)^p\underset{x\to 0}{=}o(x^{np})$

$$\text{Si } p>1 \text{ et } k\neq 0 \text{ alors } o\left(k\times x^p+o(x^{p+1})\right)\underset{x\to 0}{=}o(x^p)$$

⚠ $o(1+x)$ n'a pas de sens pour un développement limité en 0.

Division : si $\alpha_p\neq 0$ alors

$$\frac{\mathrm{P}(x)}{\alpha_p x^p+\alpha_{p+1}x^{p+1}+\ldots+o(x^n)}\underset{x\to 0}{=}\frac{\mathrm{P}(x)}{\alpha_p x^p}\times\frac{1}{1+\underbrace{\frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p}x+\ldots+o(x^{n-p})}_{\varepsilon}}$$

Il suffit d'utiliser la composition avec $\dfrac{1}{1+\varepsilon}\underset{\varepsilon\to 0}{=}1-\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+(-1)^n\varepsilon^n+o(\varepsilon^n)$.

Intégration terme à terme : $\int_0^x o(t^n)\,\mathrm{d}t\underset{x\to 0}{=}o(x^{n+1})$

⚠ Pas de dérivation : $x\mapsto o(x^n)$ n'est pas nécessairement une fonction dérivable en 0.

Développement limité en un réel *a*: on pose $x=a+\varepsilon$ et on utilise $o\left((x-a)^n\right)$.

Développement asymptotique : on pose $\dfrac{1}{x}=\varepsilon$ et on utilise $o\left(\left(\dfrac{1}{x}\right)^n\right)$.

pycreach.free.fr

Opérations sur les développements limités en zéro.

Définition de la notation de Landau o et de $\underset{x\to 0}{=}$:

$$\text{soit } n\in\mathbb{N}\,,\ f(x)\underset{x\to 0}{=}o(x^n)\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=0$$

Lien avec les équivalents : soit $k\in\mathbb{R}^*$, $f(x)\underset{x\to 0}{=}k\,x^n+o(x^n)\Leftrightarrow f(x)\underset{x\to 0}{\sim}k\,x^n$

Troncature : si $p>n$ alors $x^p\underset{x\to 0}{=}o(x^n)$

Addition : $o(x^p)+o(x^n)\underset{x\to 0}{=}o(x^{min(p\,;n)})$

Multiplication : soit $k\in\mathbb{R}$, alors $k\times o(x^n)\underset{x\to 0}{=}o(x^n)$

$$x^p\times o(x^n)\underset{x\to 0}{=}o(x^{n+p})$$

$$o(x^p)\times o(x^n)\underset{x\to 0}{=}o(x^{n+p})$$

Composition des développements limités : $\left(o(x^n)\right)^p\underset{x\to 0}{=}o(x^{np})$

$$\text{Si } p>1 \text{ et } k\neq 0 \text{ alors } o\left(k\times x^p+o(x^{p+1})\right)\underset{x\to 0}{=}o(x^p)$$

⚠ $o(1+x)$ n'a pas de sens pour un développement limité en 0.

Division : si $\alpha_p\neq 0$ alors

$$\frac{\mathrm{P}(x)}{\alpha_p x^p+\alpha_{p+1}x^{p+1}+\ldots+o(x^n)}\underset{x\to 0}{=}\frac{\mathrm{P}(x)}{\alpha_p x^p}\times\frac{1}{1+\underbrace{\frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p}x+\ldots+o(x^{n-p})}_{\varepsilon}}$$

Il suffit d'utiliser la composition avec $\dfrac{1}{1+\varepsilon}\underset{\varepsilon\to 0}{=}1-\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+(-1)^n\varepsilon^n+o(\varepsilon^n)$.

Intégration terme à terme : $\int_0^x o(t^n)\,\mathrm{d}t\underset{x\to 0}{=}o(x^{n+1})$

⚠ Pas de dérivation : $x\mapsto o(x^n)$ n'est pas nécessairement une fonction dérivable en 0.

Développement limité en un réel *a*: on pose $x=a+\varepsilon$ et on utilise $o\left((x-a)^n\right)$.

Développement asymptotique : on pose $\dfrac{1}{x}=\varepsilon$ et on utilise $o\left(\left(\dfrac{1}{x}\right)^n\right)$.

pycreach.free.fr