Opérations sur les développements limités en zéro.

Définition de la notation de Landau o et de $\underset{x \to 0}{=}$:

$$\text{soit } n \in \mathbb{N},\ f(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^n) \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$$

Lien avec les équivalents : soit $k \in \mathbb{R}^*$, $f(x) \underset{x \to 0}{=} k\,x^n + o(x^n) \Leftrightarrow f(x) \underset{x \to 0}{\sim} k\,x^n$

Troncature : si $p > n$ alors $x^p \underset{x \to 0}{=} o(x^n)$

Addition : $o(x^p) + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} o(x^{min(p;n)})$

Multiplication : soit $k \in \mathbb{R}^*$, alors $k \times o(x^n) \underset{x \to 0}{=} o(x^n)$

$$x^p \times o(x^n) \underset{x \to 0}{=} o(x^{n+p})$$

$$o(x^p) \times o(x^n) \underset{x \to 0}{=} o(x^{n+p})$$

Composition des développements limités : $(o(x^n))^p \underset{x \to 0}{=} o(x^{np})$

$$\text{Si } k \neq 0 \text{ alors } o(k \times x^p + o(x^p)) \underset{x \to 0}{=} o(x^p)$$

Division : si $\alpha_p \neq 0$ alors

$$\frac{\mathrm{P}(x)}{\alpha_p x^p + \alpha_{p+1} x^{p+1} + \ldots + o(x^n)} \underset{x \to 0}{=} \frac{\mathrm{P}(x)}{\alpha_p x^p} \times \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} x + \ldots + o(x^{n-p})}_{\varepsilon}}$$

Il suffit d'utiliser la composition avec $\frac{1}{1+\varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0}{=} 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + (-1)^n \varepsilon^n + o(\varepsilon^n)$.

Intégration terme à terme : $\int_0^x o(t^n)\,\mathrm{d}t \underset{x \to 0}{=} o(x^{n+1})$

Pas de dérivation : $x \mapsto o(x^n)$ n'est pas nécessairement une fonction dérivable en 0.

Développement limité en un réel *a*: on pose $x = a + \varepsilon$ et on utilise $o((x-a)^n)$.

Développement asymptotique : on pose $\frac{1}{x} = \varepsilon$ et on utilise $o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)$.

Opérations sur les développements limités en zéro.

Définition de la notation de Landau o et de $\underset{x \to 0}{=}$:

$$\text{soit } n \in \mathbb{N},\ f(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^n) \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$$

Lien avec les équivalents : soit $k \in \mathbb{R}^*$, $f(x) \underset{x \to 0}{=} k\,x^n + o(x^n) \Leftrightarrow f(x) \underset{x \to 0}{\sim} k\,x^n$

Troncature : si $p > n$ alors $x^p \underset{x \to 0}{=} o(x^n)$

Addition : $o(x^p) + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} o(x^{min(p;n)})$

Multiplication : soit $k \in \mathbb{R}^*$, alors $k \times o(x^n) \underset{x \to 0}{=} o(x^n)$

$$x^p \times o(x^n) \underset{x \to 0}{=} o(x^{n+p})$$

$$o(x^p) \times o(x^n) \underset{x \to 0}{=} o(x^{n+p})$$

Composition des développements limités : $(o(x^n))^p \underset{x \to 0}{=} o(x^{np})$

$$\text{Si } k \neq 0 \text{ alors } o(k \times x^p + o(x^p)) \underset{x \to 0}{=} o(x^p)$$

Division : si $\alpha_p \neq 0$ alors

$$\frac{\mathrm{P}(x)}{\alpha_p x^p + \alpha_{p+1} x^{p+1} + \ldots + o(x^n)} \underset{x \to 0}{=} \frac{\mathrm{P}(x)}{\alpha_p x^p} \times \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} x + \ldots + o(x^{n-p})}_{\varepsilon}}$$

Il suffit d'utiliser la composition avec $\frac{1}{1+\varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0}{=} 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + (-1)^n \varepsilon^n + o(\varepsilon^n)$.

Intégration terme à terme : $\int_0^x o(t^n)\,\mathrm{d}t \underset{x \to 0}{=} o(x^{n+1})$

Pas de dérivation : $x \mapsto o(x^n)$ n'est pas nécessairement une fonction dérivable en 0.

Développement limité en un réel *a*: on pose $x = a + \varepsilon$ et on utilise $o((x-a)^n)$.

Développement asymptotique : on pose $\frac{1}{x} = \varepsilon$ et on utilise $o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)$.

pycreach.free.fr