Les formules de Taylor au programme de TSI

	Hypothèses	Domaine d'application	Formule
Base de Taylor en a	Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et $a \in \mathbb{C}$	base des polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$	$P(X) = P(a) + P'(a)(X-a) + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$
Formule de Taylor-Young	Soit $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'intervalle I et $a \in I$	au voisinage de a	$f(a+\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} f(a) + \varepsilon f'(a) + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{\varepsilon^p}{p!} f^{(p)}(a) + o(\varepsilon^p)$ en posant $\varepsilon = x - a$ i.e. $x = a + \varepsilon$ on a : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\approx} f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + o((x-a)^p)$
$\triangleleft f$ admet un développement limité d'ordre 0 en $a \Rightarrow f$ est continue en a f admet un développement limité d'ordre 1 en $a \Rightarrow f$ est dérivable en a f admet un développement limité d'ordre 2 en a n'implique pas que f soit deux fois dérivable en a			
Formule de Taylor avec reste intégral	Soit $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur l'intervalle I et $a \in I$	$\forall x \in I,$	$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt$
Formule de Taylor-Young pour les fonctions vectorielles	Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'intervalle I et $a \in I$	au voisinage de a	$\begin{pmatrix} f_1(a+\varepsilon) \\ \vdots \\ f_n(a+\varepsilon) \end{pmatrix} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_n(a) \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_n'(a) \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon^2}{2} \begin{pmatrix} f_1''(a) \\ \vdots \\ f_n''(a) \end{pmatrix} + \dots + \frac{\varepsilon^p}{p!} \begin{pmatrix} f_1^{(p)}(a) \\ \vdots \\ f_n^{(p)}(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(\varepsilon^p) \\ \vdots \\ o(\varepsilon^p) \end{pmatrix}$
Série de Taylor	Soit I un intervalle contenant 0 et $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ développable en série entière	$\exists R > 0$ tel que $] -R; R[\subset I$ et $\forall x \in] -R; R[,$	$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$
Formule de Taylor à l'ordre 1 pour une fonction de plusieurs variables	Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et $a \in \Omega$	au voisinage de a	$f(x_0+h_1; y_0+h_2) \underset{\sqrt{h_1^2+h_2^2} \rightarrow 0}{\approx} f(x_0; y_0) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) + o(\sqrt{h_1^2+h_2^2})$

Les formules de Taylor au programme de TSI

	Hypothèses	Domaine d'application	Formule
Base de Taylor en a	Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et $a \in \mathbb{C}$	base des polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$	$P(X) = P(a) + P'(a)(X-a) + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$
Formule de Taylor-Young	Soit $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'intervalle I et $a \in I$	au voisinage de a	$f(a+\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} f(a) + \varepsilon f'(a) + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{\varepsilon^p}{p!} f^{(p)}(a) + o(\varepsilon^p)$ en posant $\varepsilon = x - a$ i.e. $x = a + \varepsilon$ on a : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\approx} f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + o((x-a)^p)$
$\triangleleft f$ admet un développement limité d'ordre 0 en $a \Rightarrow f$ est continue en a f admet un développement limité d'ordre 1 en $a \Rightarrow f$ est dérivable en a f admet un développement limité d'ordre 2 en a n'implique pas que f soit deux fois dérivable en a			
Formule de Taylor avec reste intégral	Soit $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur l'intervalle I et $a \in I$	$\forall x \in I,$	$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt$
Formule de Taylor-Young pour les fonctions vectorielles	Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'intervalle I et $a \in I$	au voisinage de a	$\begin{pmatrix} f_1(a+\varepsilon) \\ \vdots \\ f_n(a+\varepsilon) \end{pmatrix} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_n(a) \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_n'(a) \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon^2}{2} \begin{pmatrix} f_1''(a) \\ \vdots \\ f_n''(a) \end{pmatrix} + \dots + \frac{\varepsilon^p}{p!} \begin{pmatrix} f_1^{(p)}(a) \\ \vdots \\ f_n^{(p)}(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(\varepsilon^p) \\ \vdots \\ o(\varepsilon^p) \end{pmatrix}$
Série de Taylor	Soit I un intervalle contenant 0 et $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ développable en série entière	$\exists R > 0$ tel que $] -R; R[\subset I$ et $\forall x \in] -R; R[,$	$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$
Formule de Taylor à l'ordre 1 pour une fonction de plusieurs variables	Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et $a \in \Omega$	au voisinage de a	$f(x_0+h_1; y_0+h_2) \underset{\sqrt{h_1^2+h_2^2} \rightarrow 0}{\approx} f(x_0; y_0) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) + o(\sqrt{h_1^2+h_2^2})$