Les formules de Taylor... au programme de TSI

Fonctions d'une variable réelle

Soit un intervalle I, un réel $a\in \mathrm{I}$ et $h\in\mathbb{R}$ tel que $a+h\in \mathrm{I}$.

Remarques préliminaires : en posant : $\boxed{x=a+h}$ c'est-à-dire $\boxed{x-a=h}$

On a alors : $\boxed{x\to a} \Leftrightarrow \boxed{h\to 0}$

Formule de Taylor-Young à l'ordre 0 : local

Pour $f:\mathrm{I}\to\mathbb{C}$: f est continue en a $\Leftrightarrow$ $\forall h\in\mathbb{R}$ tel que $a+h\in\mathrm{I}$, on a : $f(a+h)\underset{h\to 0}{=} f(a)+o(1)$

Pour $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^n$: $f:t\mapsto\begin{pmatrix}f_1(t)\\ \vdots\\ f_n(t)\end{pmatrix}$ est continue en a $\Leftrightarrow$ $\forall h\in\mathbb{R}$ tel que $a+h\in\mathrm{I}$, $\begin{pmatrix}f_1(a+h)\\ \vdots\\ f_n(a+h)\end{pmatrix}\underset{h\to 0}{=}\begin{pmatrix}f_1(a)\\ \vdots\\ f_n(a)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}o(1)\\ \vdots\\ o(1)\end{pmatrix}$

Par <u>définition de la continuité</u> : $f:\mathrm{I}\to\mathbb{C}$ est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)-f(a)=0$

Par <u>définition de la continuité</u> : $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^n$ est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{h\to 0}\|f(a+h)-f(a)\|=0$ □

Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 : local

Pour $f:\mathrm{I}\to\mathbb{C}$: f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ $\exists \mathrm{A}\overset{\text{def}}{=}f'(a)\in\mathbb{C}$ tel que $\forall h\in\mathbb{R}$ vérifiant $a+h\in\mathrm{I}$, on a :
$f(a+h)\underset{h\to 0}{=}f(a)+h\times\mathrm{A}+o(h)$

Si $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ est dérivable en a alors la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a admet pour équation : $y=f(a)+(x-a)f'(a)$ (approximation affine obtenue en posant $a+h=x$)

Pour $f:\mathrm{I}\to\mathbb{C}$, par <u>définition de la dérivabilité</u> d'une fonction scalaire :

f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)=0$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h}=0$ □

<u>Application aux tangentes</u> : si $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$, en posant $x=a+h$, on a $f(x)=\underbrace{\left(f(a)+(x-a)f'(a)\right)}_{\substack{\text{meilleure approximation affine}\\ \text{de } f(x) \text{ au voisinage de } a}}+o(x-a)$

Ainsi l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est : $y=f(a)+(x-a)f'(a)$

Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour les fonctions vectorielles : local

Pour $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^n$: $f:t\mapsto\begin{pmatrix}f_1(t)\\ \vdots\\ f_n(t)\end{pmatrix}$ est dérivable en a $\Leftrightarrow$ $\exists\begin{pmatrix}\mathrm{A}_1\\ \vdots\\ \mathrm{A}_n\end{pmatrix}\overset{\text{def}}{=}f'(a)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\forall h\in\mathbb{R}$ vérifiant $a+h\in\mathrm{I}$, on a : $\begin{pmatrix}f_1(a+h)\\ \vdots\\ f_n(a+h)\end{pmatrix}\underset{h\to 0}{=}\begin{pmatrix}f_1(a)\\ \vdots\\ f_n(a)\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}\mathrm{A}_1\\ \vdots\\ \mathrm{A}_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}o(h)\\ \vdots\\ o(h)\end{pmatrix}$

Si f est dérivable en a et que $f'(a)\neq 0_{\mathbb{R}^n}$ ($f(a)$ est dit régulier) alors la tangente à la courbe de $\mathbb{R}^n$ paramétrée par f, au point de coordonnées $f(a)$, admet pour paramétrage : $\begin{cases}x_1=f_1(a)+t\,f_1{}'(a)\\ \vdots\\ x_n=f_n(a)+t\,f_n{}'(a)\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

Pour $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^n$, par <u>définition de la dérivabilité</u> d'une fonction vectorielle :

f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{h\to 0}\left\|\dfrac{1}{h}(f(a+h)-f(a))-f'(a)\right\|=0$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\|f(a+h)-f(a)-h\,f'(a)\|}{h}=0$ □

<u>Application aux tangentes</u> : dans $\mathbb{R}^2$, une équation cartésienne de la tangente est $\begin{vmatrix}x-f_1(a) & f_1{}'(a)\\ y-f_2(a) & f_2{}'(a)\end{vmatrix}=0$.

Formule de Taylor-Young à l'ordre n : local

Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ est de classe C^p sur l'intervalle I alors :

$$\forall h \in \mathbb{R} \text{ tel que } a+h \in \mathrm{I} \text{, on a : } f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a)+h\times f'(a)+\frac{h^2}{2}\times f''(a)+\ldots+\frac{h^p}{p!}\times f^{(p)}(a)+o(h^p)$$

En posant $x=a+h$ on obtient un développement limité à l'ordre p en a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a)+(x-a)\times f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^p}{p!}\times f^{(p)}(a)+o((x-a)^p)$$

Démonstration : <u>par récurrence</u>, avec HR(p) l'énoncé précédent.
<u>Initialisation</u> : HR(0) est vérifiée par définition de la continuité d'une fonction en a.
<u>Hérédité</u> : supposons qu'il existe un entier $k>0$ tel que HR(k) soit vérifié.
Soit $f \in \mathrm{C}^{k+1}(\mathrm{I};\mathbb{C})$ alors $f' \in \mathrm{C}^k(\mathrm{I};\mathbb{C})$ donc d'après $\mathrm{HR}(k)$,

$$\forall h \in \mathbb{R} \text{ tel que } a+h \in \mathrm{I} \text{, on a : } f'(a+h)=f'(a)+h\times f''(a)+\frac{h^2}{2}\times f'''(a)+\ldots+\frac{h^k}{k!}\times f^{(k+1)}(a)+o(h^k)$$

Ainsi, la fonction $h \mapsto f'(a+h)$ étant continue pour $a+h \in \mathrm{I}$, <u>l'intégration membre à membre</u> donne :

$$\int_0^h f'(a+t)\,\mathrm{d}t=\int_0^h f'(a)+t\times f''(a)+t^2\times\frac{f'''(a)}{2}+\ldots+t^k\times\frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}+o(t^k)\,\mathrm{d}t$$

Or la fonction $h \mapsto f'(a+h)-\left(f'(a)+h\times f''(a)+\frac{h^2}{2}\times f'''(a)+\ldots+\frac{h^k}{k!}\times\left(f^{(k+1)}(a)\right)\right)=o(h^k)$ est continue pour $a+h \in \mathrm{I}$ donc l'intégrale $\int_0^h o(t^k)\,\mathrm{d}t$ est définie pour $a+h \in \mathrm{I}$.

De plus $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ tel que $|t|<\delta \Rightarrow |o(t^k)|<\varepsilon|t^k|$

Or si $h \in [0;\delta]$, <u>l'inégalité de la moyenne</u> donne : $\left|\int_0^h o(t^k)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^h |o(t^k)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon\int_0^h t^k\,\mathrm{d}t=\varepsilon\frac{h^{k+1}}{k+1}$

Si $h \in [-\delta;0]$, <u>l'inégalité de la moyenne</u> donne : $\left|\int_0^h o(t^k)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_h^0 |o(t^k)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon\int_h^0 (-t^k)\,\mathrm{d}t=\varepsilon\left[-\frac{(-t)^{k+1}}{k+1}\right]_h^0=\varepsilon\frac{(-h)^{k+1}}{k+1}$

Ainsi, $\int_0^h o(t^k)\,\mathrm{d}t=o(h^{k+1})$.

Donc : $f(a+h)-f(a)=hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\ldots+\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}f^{k+1}(a)+o(h^{k+1})$ ainsi $\mathrm{HR}(k+1)$ est vérifiée.

<u>Conclusion</u> : pour tout entier naturel p, $\mathrm{HR}(p)$ est vraie.□

Pour $n \geqslant 2$ le théorème de Taylor-Young N'EST PAS un théorème d'équivalence.

Contre-exemple : pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

$\forall h\neq 0$, $f(0+h)=h^2\left(h\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right)=o(h^2)$ car $\lim\limits_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{h}\right)=0$ (théorème de comparaison)

De plus $f(0)=0$ donc $\forall h \in \mathbb{R}$, $f(0+h)=o(h^2)$, ainsi admet un développement limité à l'ordre 2.

Par ailleurs f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} f'(x)=3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ f'(0)=0 \end{cases}$ (th. de prolongement de la dérivée)

Cependant, pour $x\neq 0$, $\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=3x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite quand $x\to 0$, donc la fonction f' n'est pas dérivable en 0, ainsi la fonction f n'est pas 2 fois dérivable en 0.

<u>Application à l'étude de la position locale d'une courbe par rapport à sa tangente en un point</u> : en utilisant un développement limité de $f(x)$ en a du type : $f(x)=\underbrace{f(a)+(x-a)f'(a)}_{\text{meilleure approximation affine de } f(x) \text{ au voisinage de } a}+\underbrace{\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+o((x-a)^k)}_{\text{contrôle la position locale de la courbe par rapport à sa tangente}}$

Il suffit d'étudier le signe de $\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$ pour conclure sur la position locale de la courbe par rapport à sa tangente... au voisinage de a.

Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour les fonctions vectorielles : local

Si $f: \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^p sur l'intervalle I alors :

$$\forall h \in \mathbb{R} \text{ tel que } a+h \in \mathrm{I} \text{, on a : } \begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ \vdots \\ f_n(a+h) \end{pmatrix} \underset{h \to 0}{=} \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_n(a) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_n'(a) \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} f_1''(a) \\ \vdots \\ f_n''(a) \end{pmatrix} \ldots + \frac{h^p}{p!} \begin{pmatrix} f_1^{(p)}(a) \\ \vdots \\ f_n^{(p)}(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(h^p) \\ \vdots \\ o(h^p) \end{pmatrix}$$

Démonstration : par application de la formule de Taylor-Young précédente sur chaque fonction coordonnée.□

Application dans $\mathbb{R}^2$ à l'étude de la position locale d'une courbe par rapport à sa tangente en un point : en notant :

p l'ordre de la première dérivée non nulle de f en a : $p \overset{\text{def}}{=} min\{i \geq 1 | f^{(i)}(a) \neq 0\}$

q l'ordre de la première dérivée non colinéaire à $f^{(p)}(a)$: $q \overset{\text{def}}{=} min\{j > p | det(f^{(j)}(a); f^{(p)}(a)) \neq 0\}$

On a : $$\begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ f_2(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \end{pmatrix} + \frac{h^p}{p!} \underbrace{\left(\begin{pmatrix} f_1^{(p)}(a) \\ f_2^{(p)}(a) \end{pmatrix} + \frac{h}{p+1} \begin{pmatrix} f_1^{(p+1)}(a) \\ f_2^{(p+1)}(a) \end{pmatrix} + \ldots + \frac{p!h^{q-1-p}}{(q-1)!} \begin{pmatrix} f_1^{(q-1)}(a) \\ f_2^{(q-1)}(a) \end{pmatrix} \right)}_{\text{colinéaire et dans le même sens que } f^{(p)}(a) \text{ pour } h \text{ proche de } 0} + \underbrace{\frac{h^q}{q!} \begin{pmatrix} f_1^{(q)}(a) \\ f_2^{(q)}(a) \end{pmatrix}}_{\text{non colinéaire à } f^{(p)}(a)} + \begin{pmatrix} o(h^q) \\ o(h^q) \end{pmatrix}$$

Les parités de p et q permettent de caractériser la position locale de la courbe par rapport à sa tangente (ou demi-tangente) au voisinage du point $f(a)$.

Formule de Taylor-Lagrange : un théorème d'existence

Si $f:[a;b] \to \mathbb{R}$ est $p+1$ fois dérivable sur l'intervalle $[a;b]$ alors

$$\exists c \in]a;b[\text{ tel que } f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(c)$$

⚠ Ce résultat n'est plus valide pour f à valeurs complexes ou à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque : pour $p=0$ ce résultat est le théorème des accroissements finis.

Démonstration : Soit φ la fonction définie sur $[a;b]$ par : $\varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{p+1}}{(p+1)!} \mathrm{A}$

La fonction φ est dérivable sur $[a;b]$ et $\varphi(b)=0$

En posant $\mathrm{A} \overset{\text{def}}{=} \frac{(p+1)!}{(b-a)^{p+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right)$ on a de plus $\varphi(a)=0$.

Ainsi, le théorème de Rolle assure qu'il existe un réel $c \in]a;b[$ tel que $\varphi'(c)=0$.

Or $\forall x \in [a;b]$, $\varphi'(x) = -f'(x) - \sum_{k=1}^{p} \left(-\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) \right) + \frac{(b-x)^p}{p!} \mathrm{A}$

$$\varphi'(x) = -f'(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) - \sum_{k=1}^{p} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + \frac{(b-x)^p}{p!} \mathrm{A}$$

$$\varphi'(x) = -\frac{(b-x)^p}{p!} f^{(p+1)}(x) + \frac{(b-x)^p}{p!} \mathrm{A}$$

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^p}{p!} (\mathrm{A} - f^{(p+1)}(x))$$

Ainsi puisque $\varphi'(c)=0$, et que $(b-c) \neq 0$, on a : $\mathrm{A} = f^{(p+1)}(c)$

Donc $\frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(c) = f(b) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ □

Formule de Taylor avec reste intégral : global

Si $f: \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ est de classe C^{p+1} sur l'intervalle I alors pour $a \in \mathrm{I}$ on a :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \ f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) \mathrm{d}t$$

Démonstration : Par récurrence sur p : $\mathrm{HR}(p)$ est la proposition précédente

Initialisation : Si f est de classe C^1 sur l'intervalle I alors $\int_a^x \frac{(x-0)^0}{0!} f'(t) \mathrm{d}t = \int_a^x f'(t) \mathrm{d}t = f(x) - f(a)$ d'après le théorème fondamental de l'analyse, donc $\mathrm{HR}(0)$ est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{HR}(p)$ soit vérifiée alors si f est de classe C^{p+2} sur l'intervalle I, alors pour $x\in\mathrm{I}$, $u:t\mapsto-\dfrac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}$ et la fonction $v:t\mapsto f^{(p+1)}(t)$ étant de classe C^1 sur l'intervalle $[a;x]$, la formule d'intégration par parties donne :

$$\int_a^x \underbrace{\frac{(x-t)^p}{p!}}_{=u'(t)}\underbrace{f^{(p+1)}(t)}_{=v(t)}\,\mathrm{d}t=\left[\underbrace{-\frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}}_{=u(t)}\underbrace{f^{(p+1)}(t)}_{=v(t)}\right]_{t=a}^{t=x}-\int_a^x\underbrace{-\frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}}_{=u(t)}\underbrace{f^{(p+2)}(t)}_{=v'(t)}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{(x-a)^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+1)}(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Donc $\mathrm{HR}(p+1)$ est vérifiée.
Conclusion : pour tout entier naturel p, $\mathrm{HR}(p)$ est vérifiée.□

Formule de Taylor pour les polynômes : décomposition dans une base

$$\text{Si } \mathrm{P}\in\mathbb{C}_n[\mathrm{X}] \text{ alors pour } a\in\mathbb{C},\ \mathrm{P}(\mathrm{X})=\mathrm{P}(a)+\mathrm{P}'(a)(\mathrm{X}-a)+\ldots+\frac{\mathrm{P}^{(n)}(a)}{n!}(\mathrm{X}-a)^n$$

Démonstration : soit une fonction polynomiale f de degré n. La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et si l'entier $p>n$ alors $f^{(p)}=0$ donc la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $p+1$ assure l'égalité précédente.
Une démonstration algébrique consiste à considérer l'égalité précédente comme une décomposition du polynôme P dans une base.
$\mathrm{B}_a=(1;\mathrm{X}-a;(\mathrm{X}-a)^2,\ldots;(\mathrm{X}-a)^n)$ est une famille libre de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ car échelonnée.
De plus $\mathrm{Card}(\mathrm{B}_a)=n+1$ or $dim(\mathbb{C}_n[\mathrm{X}])=n+1$ donc B_a est une base de $\mathrm{C}_n[\mathrm{X}]$.
Ainsi, il existe $(\alpha_0;\ldots;\alpha_n)\in\mathbb{C}^n$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X})=\alpha_0+\alpha_1(\mathrm{X}-a)+\ldots+\alpha_n(\mathrm{X}-a)^n$

Or $\forall k\in[\![0;n]\!]$, et $\forall p\in[\![0;k]\!]$ $\left((\mathrm{X}-a)^k\right)^{(p)}=k(k-1)\ldots(k-(p-1))(\mathrm{X}-a)^{k-p}=\dfrac{k!}{(k-p)!}(\mathrm{X}-a)^{k-p}$

si $p>k$ alors $\left((\mathrm{X}-a)^k\right)^{(p)}=0$

Par dérivation successives : $\forall p\in[\![0;n]\!]$, $\mathrm{P}^{(p)}(\mathrm{X})=\alpha_p p!+\alpha_{p+1}\dfrac{(p+1)!}{(p+1-p)!}(\mathrm{X}-a)^{p+1-p}+\ldots+\alpha_n\dfrac{(n)!}{(n-p)!}(\mathrm{X}-a)^{n-p}$

D'où, $\mathrm{P}^{(p)}(0)=\alpha_p p!$ ainsi, $\alpha_p=\dfrac{\mathrm{P}^{(p)}(0)}{p!}$ □

Série de Taylor en 0 : unicité du développement.

Soit I un intervalle contenant 0, si $f:\mathrm{I}\to\mathbb{C}$ est développable en série entière au voisinage de 0 alors :

$$\text{il existe } \mathrm{R}>0 \text{ tel que }]-\mathrm{R};\mathrm{R}[\subset\mathrm{I} \text{ et } \forall x\in]-\mathrm{R};\mathrm{R}[,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Démonstration : Soit la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R' et $\mathrm{R}\in]0;\mathrm{R}'[$ tel que $]-\mathrm{R};\mathrm{R}[\subset\mathrm{I}$ alors

$\forall x\in]-\mathrm{R};\mathrm{R}[$, $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ alors par dérivation terme à terme à l'intérieur de l'intervalle de convergence :

$\forall p\in\mathbb{N}$, $\forall x\in]-\mathrm{R};\mathrm{R}[$, $f^{(p)}(x)=\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n\right)^{(p)}=\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty}n(n-1)\ldots(n-(p-1))a_n x^{n-p}$

Donc $\forall p\in\mathbb{N}$, $f^{(p)}(0)=p!a_p$ c'est-à-dire $a_p=\dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$ □

Fonctions de plusieurs variables réelles

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a=(a_1;\ldots;a_p)\in\Omega$ et $h=(h_1;\ldots;h_p)$ tel que $a+h\in\Omega$
Remarques préliminaires : en posant $\boxed{(x_1;\ldots;x_p)=(a_1+h_1;\ldots;a_p+h_p)}$ c'est-à-dire $\boxed{(h_1;\ldots;h_p)=(x_1-a_1;\ldots;x_p-a_p)}$

on a $\boxed{(x_1;\ldots;x_p)\to(a_1;\ldots;a_p)\Leftrightarrow\|(h_1;\ldots;h_p)\|\to 0}$

Formule de Taylor à l'ordre 0 : local

Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$, on a :

$$f \text{ est continue en } a=(a_1;\dots;a_p)\in\Omega$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall h=(h_1;\dots;h_p)\in\mathbb{R}^p \text{ tel que } a+h\in\Omega,\ f(a_1+h_1;\dots;a_p+h_p) \underset{\|(h_1;\dots;h_p)\|\to 0}{=} (a_1;\dots a_p)+o(\|(h_1;\dots;h_p)\|)$$
$$\text{i.e. } f(a+h)\underset{\|h\|\to 0}{=} f(a)+o(\|h\|)$$

Démonstration : par définition de la limite d'une fonction de plusieurs variables à valeurs dans $\mathbb{R}^n$:
$\lim\limits_{h\to 0_{\mathbb{R}^p}}(f(a+h)-f(a))=0\Leftrightarrow \lim\limits_{\|h\|\to 0}\|f(a+h)-f(a)\|=0\Leftrightarrow\forall i\in[0;n], \lim\limits_{\|h\|\to 0} f_i(a+h)-f_i(a)=0$ □

Formule de Taylor à l'ordre 1: existence et unicité du développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de classe C^1.

Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$ de classe C^1 sur Ω (ie. $\frac{\partial f}{\partial x_1}$,..., $\frac{\partial f}{\partial x_p}$ sont continues sur Ω).

Il existe $M=(m_1\ \dots\ m_p)\in M_{1,p}(\mathbb{R})$ tel que $\forall h=(h_1;\dots;h_p)\in\mathbb{R}^p$ vérifiant $a+h\in\Omega$ on ait :

$$f(a_1+h_1;\dots;a_p+h_p)\underset{\|(h_1;\dots;h_p)\|\to 0}{=} f(a_1;\dots;a_p)+(m_1\ \dots\ m_p)\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_p\end{pmatrix}+o(\|(h_1;\dots;h_p)\|^2)$$
$$\text{i.e. } f(a+h)\underset{\|h\|\to 0}{=} f(a)+M\times h+o(\|h\|^2)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(m_1\ \dots\ m_p)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1;\dots;a_p)\ \dots\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(a_1;\dots;a_p)\right) \text{ i.e. } M=\nabla f(a)$$

Démonstration : Pour <u>l'existence</u>, supposons pour simplifier l'écriture $p=3$ et $n=1$ (le cas p quelconque se généralise facilement et pour n quelconque il suffit de travailler sur les n fonctions coordonnées)
$f(a+h)-f(a)=f(a_1+h_1;a_2+h_2;a_3+h_3)-f(a_1;a_2;a_3)$
$=(f(a_1+h_1;a_2+h_2;a_3+h_3)-f(a_1;a_2+h_2;a_3+h_3))+(f(a_1;a_2+h_2;a_3+h_3)-f(a_1;a_2;a_3+h_3))-(f(a_1;a_2;a_3+h_3)-f(a_1;a_2;a_3))$

La fonction $t\mapsto f(t;a_2+h_2;a_3+h_3)$ étant dérivable au voisinage de a_1, le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un réel $\alpha_1\in[0;1]$ (dépendant éventuellement de a_2+h_2 et de a_3+h_3) tel que

$$f(a_1+h_1;a_2+h_2;a_3+h_3)-f(a_1;a_2+h_2;a_3+h_3)=h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\alpha_1 h_1;a_2+h_2;a_3+h_3)$$

La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ étant supposée continue en a on a : $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\alpha 1\,h_1;a_2+h_2;a_3+h_3)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1;a_2;a_3)+\underset{\|h\|\to 0}{o}(1)$

La fonction $t\mapsto f(a_1;t;a_3+h_3)$ étant dérivable au voisinage de a_2, le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un réel $\alpha_2\in[0;1]$ (dépendant éventuellement de a_3+h_3) tel que :

$$f(a_1;a_2+h_2;a_3+h_3)-f(a_1;a_2;a_3+h_3)=h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1;a_2+\alpha_2 h_2;a_3+h_3)$$

Or la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ étant supposée continue en a, on a : $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1;a_2+\alpha_2 h_2;a_3+h_3)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1;a_2;a_3)+\underset{\|h\|\to 0}{o}(1)$

La fonction $t\mapsto f(a_1;a_2;t)$ étant dérivable au voisinage de a_3, le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un réel $\alpha_3\in[0;1]$ tel que : $f(a_1;a_2;a_3+h_3)-f(a_1;a_2;a_3)=h_3\frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1;a_2;a_3+\alpha_3 h_3)$

Or la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ étant supposée continue en a, on a : $\frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1;a_2;a_3+\alpha_3 h_3)=\frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1;a_2;a_3)+\underset{\|h\|\to 0}{o}(1)$

Ainsi : $f(a+h)-f(a)=h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)+h_3\frac{\partial f}{\partial x_3}(a)+(h_1+h_2+h_3)\underset{\|h\|\to 0}{o}(1)$

De plus $|h_1+h_2+h_3|\leqslant|h_1|+|h_2|+|h_3|\leqslant 3\|h\|$ donc $(h_1+h_2+h_3)\underset{\|h\|\to 0}{o}(1)=\underset{\|h\|\to 0}{o}(\|h\|)$

Pour l'unicité : soient $A\in L(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^n)$ et $B\in L(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^n)$ telles que $\forall h\in\mathbb{R}^p$ tel que $a+h\in\Omega$,

$\mathrm{A}(h)+o(\|h\|)=\mathrm{B}(h)+o(\|h\|)$ alors $(\mathrm{A}-\mathrm{B})(h)=o(\|h\|)$ donc pour $\|h\|\neq 0$, $(\mathrm{A}-\mathrm{B})\left(\frac{1}{\|h\|}h\right)=o(1)$

Par passage à la limite quand $\|h\|$ tend vers 0, et par continuité de l'application linéaire $\mathrm{A}-\mathrm{B}$, l'application linéaire $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ doit s'annuler pour tous les vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^p$ ce qui impose $\mathrm{A}-\mathrm{B}=0_{\mathrm{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^n)}$ donc A=B. □

Application au plan tangent à une surface d'équation : $z=f(x;y)$

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ $(a_1;a_2)\in\mathbb{R}^2$ et $(u;v)\in\mathbb{R}^2$,

$$f(a_1+h_1;a_2+h_2)=f(a_1;a_2)+h_1\times\frac{\partial f}{\partial x}(a_1;a_2)+h_2\times\frac{\partial f}{\partial y}(a_1;a_2)+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

Ainsi, au voisinage du point $(a_1;a_2;f(a_1;a_2))$ de l'espace on a :

$$\begin{pmatrix} a_1+h_1\\ a_2+h_2\\ f(a_1+h_1;a_2+h_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ f(a_1;a_2)\end{pmatrix}+h_1\begin{pmatrix}1\\0\\ \frac{\partial f}{\partial x}(a_1;a_2)\end{pmatrix}+h_2\begin{pmatrix}0\\1\\ \frac{\partial f}{\partial y}(a_1;a_2)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\ o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)\end{pmatrix}$$

Le plan tangent à la surface d'équation $z=f(x;y)$ au point $\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ f(a_1;a_2)\end{pmatrix}$ est donc dirigé par les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\ \frac{\partial f}{\partial x}(a_1;a_2)\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\ \frac{\partial f}{\partial y}(a_1;a_2)\end{pmatrix}$.

Application à une courbe du plan définie implicitement

Pour la courbe $\mathscr{C}$ définie dans le plan par une équation $\mathrm{F}(x;y)=0$, où F est de classe C^1 sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$.

On considère un point $(x_0;y_0)\in\mathscr{C}$ et on pose $(x;y)=(x_0+h_1;y_0+h_2)\in\Omega$ ainsi on a :

$$\mathrm{F}(x;y)=\mathrm{F}(x_0;y_0)+(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0)+(y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0)+o(\|(x-x_0;y-y_0)\|)$$

Or $\mathrm{F}(x_0;y_0)=0$ et $\mathrm{M}(x;y)\in\Sigma\Leftrightarrow\mathrm{F}(x;y)=0$

$$\mathrm{M}(x;y)\in\Sigma\ \Rightarrow\ 0=\underbrace{(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0)+(y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0)}_{\text{équation cartésienne de la tangente à C au point de coordonnées }(x_0;y_0)}+o(\|(x-x_0;y-y_0)\|)$$

Si $(x_0;y_0)$ n'est pas un point critique pour F alors on obtient une approximation affine de l'équation vérifiée par les coordonnées des points appartenant à $\mathscr{C}$ au voisinage de $(x_0;y_0)$.

Ainsi, la tangente à la courbe définie par $\mathrm{F}(x;y)=0$ au point régulier $(x_0;y_0)$ est normale au gradient de F évalué au point $(x_0;y_0)$: $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0);\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0)\right)$.

Application à une surface de l'espace définie implicitement

Pour la surface Σ définie dans l'espace par une équation $\mathrm{F}(x;y;z)=0$, où F est de classe C^1 sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^3$.

On considère un point $(x_0;y_0;z_0)\in\Sigma$ et on pose $(x;y;z)=(x_0+h_1;y_0+h_2;z_0+h_3)\in\Omega$ ainsi on a :

$$\mathrm{F}(x;y;z)=\mathrm{F}(x_0;y_0;z_0)+(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)+(y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)+(z-z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)+o(\|(x-x_0;y-y_0;z-z_0)\|)$$

Or $\mathrm{F}(x_0;y_0;z_0)=0$ et $\mathrm{M}(x;y;z)\in\Sigma\Leftrightarrow\mathrm{F}(x;y;z)=0$

$$\mathrm{M}(x;y;z)\in\Sigma\ \Rightarrow\ 0=\underbrace{(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)+(y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)+(z-z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)}_{\text{équation cartésienne du plan tangent à }\Sigma\text{ au point de coordonnées }(x_0;y_0;z_0)}+o(\|(x-x_0;y-y_0;z-z_0)\|)$$

Si $(x_0;y_0;z_0)$ n'est pas un point critique de F, on obtient une approximation affine de l'équation vérifiée par les coordonnées des points appartenant à Σ au voisinage de $(x_0;y_0;z_0)$.

Ainsi, le plan tangent à la surface définie par $\mathrm{F}(x;y;z)=0$ au point régulier $(x_0;y_0;z_0)$ est normal au gradient de F évalué au point $(x_0;y_0;z_0)$: $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0;y_0;z_0);\frac{\partial F}{\partial y}(x_0;y_0;z_0);\frac{\partial F}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)\right)$.