

Les formules de Taylor... au programme de TSI

Fonctions d'une variable réelle

Soit un intervalle I , un réel $a \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in I$.

Remarques préliminaires : en posant : $x = a+h$ c'est-à-dire $x-a = h$

On a alors : $x \rightarrow a \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

Formule de Taylor-Young à l'ordre 0 : local

Pour $f: I \rightarrow \mathbb{C}$: f est continue en $a \Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in I$, on a : $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + o(1)$

Pour $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$: $f: t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ est continue en $a \Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in I$, $\begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ \vdots \\ f_n(a+h) \end{pmatrix} \underset{h \rightarrow 0}{=} \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_n(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(1) \\ \vdots \\ o(1) \end{pmatrix}$

Par définition de la continuité : $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ est continue en a si et seulement si $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) = 0$

Par définition de la continuité : $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue en a si et seulement si $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(a+h) - f(a)\| = 0 \square$

Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 : local

Pour $f: I \rightarrow \mathbb{C}$: f est dérivable en $a \Leftrightarrow \exists A \stackrel{\text{def}}{=} f'(a) \in \mathbb{C}$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}$ vérifiant $a+h \in I$, on a :
 $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + h \times A + o(h)$

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a alors la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a admet pour équation : $y = f(a) + (x-a)f'(a)$ (approximation affine obtenue en posant $a+h = x$)

Pour $f: I \rightarrow \mathbb{C}$, par définition de la dérivabilité d'une fonction scalaire :

f est dérivable en $a \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h} = 0 \square$

Application aux tangentes : si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, en posant $x = a+h$, on a $f(x) = \underbrace{(f(a) + (x-a)f'(a))}_{\text{meilleure approximation affine de } f(x) \text{ au voisinage de } a} + o(x-a)$

Ainsi l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est : $y = f(a) + (x-a)f'(a)$

Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour les fonctions vectorielles : local

Pour $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$: $f: t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ est dérivable en $a \Leftrightarrow \exists \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} f'(a) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}$ vérifiant $a+h \in I$, on

$$a : \begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ \vdots \\ f_n(a+h) \end{pmatrix} \underset{h \rightarrow 0}{=} \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_n(a) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(h) \\ \vdots \\ o(h) \end{pmatrix}$$

Si f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ ($f(a)$ est dit régulier) alors la tangente à la courbe de \mathbb{R}^n paramétrée

par f , au point de coordonnées $f(a)$, admet pour paramétrage : $\begin{cases} x_1 = f_1(a) + t f_1'(a) \\ \vdots \\ x_n = f_n(a) + t f_n'(a) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Pour $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, par définition de la dérivabilité d'une fonction vectorielle :

f est dérivable en $a \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (f(a+h) - f(a)) - f'(a) \right\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - h f'(a)\|}{h} = 0 \square$

Application aux tangentes : dans \mathbb{R}^2 , une équation cartésienne de la tangente est $\begin{vmatrix} x - f_1(a) & f_1'(a) \\ y - f_2(a) & f_2'(a) \end{vmatrix} = 0$.

Formule de Taylor-Young à l'ordre n : local

Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^p sur l'intervalle I alors :

$$\forall h \in \mathbb{R} \text{ tel que } a+h \in I, \text{ on a : } f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + h \times f'(a) + \frac{h^2}{2} \times f''(a) + \dots + \frac{h^p}{p!} \times f^{(p)}(a) + o(h^p)$$

En posant $x = a+h$ on obtient un développement limité à l'ordre p en a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + (x-a) \times f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^p}{p!} \times f^{(p)}(a) + o((x-a)^p)$$

Démonstration : par récurrence, avec HR(p) l'énoncé précédent.

Initialisation : HR(0) est vérifiée par définition de la continuité d'une fonction en a .

Hérédité : supposons qu'il existe un entier $k > 0$ tel que HR(k) soit vérifié.

Soit $f \in C^{k+1}(I; \mathbb{C})$ alors $f' \in C^k(I; \mathbb{C})$ donc d'après HR(k),

$$\forall h \in \mathbb{R} \text{ tel que } a+h \in I, \text{ on a : } f'(a+h) = f'(a) + h \times f''(a) + \frac{h^2}{2} \times f'''(a) + \dots + \frac{h^k}{k!} \times f^{(k+1)}(a) + o(h^k)$$

Ainsi, la fonction $h \mapsto f'(a+h)$ étant continue pour $a+h \in I$, l'intégration membre à membre donne :

$$\int_0^h f'(a+t) dt = \int_0^h f'(a) + t \times f''(a) + t^2 \times \frac{f'''(a)}{2} + \dots + t^k \times \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} + o(t^k) dt$$

Or la fonction $h \mapsto f'(a+h) - \left(f'(a) + h \times f''(a) + \frac{h^2}{2} \times f'''(a) + \dots + \frac{h^k}{k!} \times f^{(k+1)}(a) \right) = o(h^k)$ est continue pour $a+h \in I$

donc l'intégrale $\int_0^h o(t^k) dt$ est définie pour $a+h \in I$.

De plus $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $|t| < \delta \Rightarrow |o(t^k)| < \varepsilon |t^k|$

Or si $h \in [0; \delta]$, l'inégalité de la moyenne donne : $\left| \int_0^h o(t^k) dt \right| \leq \int_0^h |o(t^k)| dt \leq \varepsilon \int_0^h t^k dt = \varepsilon \frac{h^{k+1}}{k+1}$

Si $h \in [-\delta; 0]$, l'inégalité de la moyenne donne : $\left| \int_0^h o(t^k) dt \right| \leq \int_h^0 |o(t^k)| dt \leq \varepsilon \int_h^0 (-t^k) dt = \varepsilon \left[-\frac{(-t)^{k+1}}{k+1} \right]_h^0 = \varepsilon \frac{(-h)^{k+1}}{k+1}$

Ainsi, $\int_0^h o(t^k) dt = o(h^{k+1})$.

Donc : $f(a+h) - f(a) = h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a) + o(h^{k+1})$ ainsi HR($k+1$) est vérifiée.

Conclusion : pour tout entier naturel p , HR(p) est vraie. \square

 Pour $n \geq 2$ le théorème de Taylor-Young N'EST PAS un théorème d'équivalence.

Contre-exemple : pour f définie sur \mathbb{R} par
$$\begin{cases} f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$\forall h \neq 0, f(0+h) = h^2 \left(h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \right) = o(h^2)$ car $\lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$ (théorème de comparaison)

De plus $f(0) = 0$ donc $\forall h \in \mathbb{R}, f(0+h) = o(h^2)$, ainsi admet un développement limité à l'ordre 2.

Par ailleurs f est dérivable sur \mathbb{R} et
$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$
 (th. de prolongement de la dérivée)

Cependant, pour $x \neq 0, \frac{f'(x) - f'(0)}{x-0} = 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite quand $x \rightarrow 0$, donc la fonction f' n'est pas dérivable en 0, ainsi la fonction f n'est pas 2 fois dérivable en 0.

Application à l'étude de la position locale d'une courbe par rapport à sa tangente en un point : en utilisant un

développement limité de $f(x)$ en a du type : $f(x) = \underbrace{f(a) + (x-a)f'(a)}_{\text{meilleure approximation affine de } f(x) \text{ au voisinage de } a} + \underbrace{\frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^k)}_{\text{contrôle la position locale de la courbe par rapport à sa tangente}}$

Il suffit d'étudier le signe de $\frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ pour conclure sur la position locale de la courbe par rapport à sa tangente... au voisinage de a .

Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour les fonctions vectorielles : local

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^p sur l'intervalle I alors :

$$\forall h \in \mathbb{R} \text{ tel que } a+h \in I, \text{ on a : } \begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ \vdots \\ f_n(a+h) \end{pmatrix} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_n(a) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_n'(a) \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} f_1''(a) \\ \vdots \\ f_n''(a) \end{pmatrix} \dots + \frac{h^p}{p!} \begin{pmatrix} f_1^{(p)}(a) \\ \vdots \\ f_n^{(p)}(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(h^p) \\ \vdots \\ o(h^p) \end{pmatrix}$$

Démonstration : par application de la formule de Taylor-Young précédente sur chaque fonction coordonnée. \square

Application dans \mathbb{R}^2 à l'étude de la position locale d'une courbe par rapport à sa tangente en un point : en notant :

p l'ordre de la première dérivée non nulle de f en a : $p \stackrel{\text{def}}{=} \min \{ i \geq 1 \mid f^{(i)}(a) \neq 0 \}$

q l'ordre de la première dérivée non colinéaire à $f^{(p)}(a)$: $q \stackrel{\text{def}}{=} \min \{ j > p \mid \det(f^{(j)}(a); f^{(p)}(a)) \neq 0 \}$

$$\text{On a : } \begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ f_2(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \end{pmatrix} + \frac{h^p}{p!} \underbrace{\begin{pmatrix} f_1^{(p)}(a) \\ f_2^{(p)}(a) \end{pmatrix}}_{\text{colinéaire et dans le même sens que } f^{(p)}(a) \text{ pour } h \text{ proche de } 0} + \frac{h}{p+1} \begin{pmatrix} f_1^{(p+1)}(a) \\ f_2^{(p+1)}(a) \end{pmatrix} + \dots + \frac{p! h^{q-1-p}}{(q-1)!} \begin{pmatrix} f_1^{(q-1)}(a) \\ f_2^{(q-1)}(a) \end{pmatrix} + \frac{h^q}{q!} \underbrace{\begin{pmatrix} f_1^{(q)}(a) \\ f_2^{(q)}(a) \end{pmatrix}}_{\text{non colinéaire à } f^{(p)}(a)} + \begin{pmatrix} o(h^q) \\ o(h^q) \end{pmatrix}$$

Les parités de p et q permettent de caractériser la position locale de la courbe par rapport à sa tangente (ou demi-tangente) au voisinage du point $f(a)$.

Formule de Taylor-Lagrange : un théorème d'existence

Si $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est $p+1$ fois dérivable sur l'intervalle $[a; b]$ alors

$$\exists c \in]a; b[\text{ tel que } f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(c)$$

Ce résultat n'est plus valide pour f à valeurs complexes ou à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Remarque : pour $p=0$ ce résultat est le théorème des accroissements finis.

Démonstration : Soit φ la fonction définie sur $[a; b]$ par : $\varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^p \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{p+1}}{(p+1)!} A$

La fonction φ est dérivable sur $[a; b]$ et $\varphi(b) = 0$

En posant $A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(p+1)!}{(b-a)^{p+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^p \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right)$ on a de plus $\varphi(a) = 0$.

Ainsi, le théorème de Rolle assure qu'il existe un réel $c \in]a; b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

$$\text{Or } \forall x \in [a; b], \varphi'(x) = -f'(x) - \sum_{k=1}^p \left(-\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) \right) + \frac{(b-x)^p}{p!} A$$

$$\varphi'(x) = -f'(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) - \sum_{k=1}^p \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + \frac{(b-x)^p}{p!} A$$

$$\varphi'(x) = -\frac{(b-x)^p}{p!} f^{(p+1)}(x) + \frac{(b-x)^p}{p!} A$$

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^p}{p!} (A - f^{(p+1)}(x))$$

Ainsi puisque $\varphi'(c) = 0$, et que $(b-c) \neq 0$, on a : $A = f^{(p+1)}(c)$

$$\text{Donc } \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(c) = f(b) - \sum_{k=0}^p \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \quad \square$$

Formule de Taylor avec reste intégral : global

Si $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^{p+1} sur l'intervalle I alors pour $a \in I$ on a :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt$$

Démonstration : Par récurrence sur p : HR(p) est la proposition précédente

Initialisation : Si f est de classe C^1 sur l'intervalle I alors $\int_a^x \frac{(x-0)^0}{0!} f'(t) dt = \int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a)$ d'après le théorème fondamental de l'analyse, donc HR(0) est vérifiée.

Hérédité : supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que HR(p) soit vérifiée alors si f est de classe C^{p+2} sur l'intervalle I , alors

pour $x \in I$, $u: t \mapsto -\frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}$ et la fonction $v: t \mapsto f^{(p+1)}(t)$ étant de classe C^1 sur l'intervalle $[a; x]$, la formule

d'intégration par parties donne :

$$\int_a^x \underbrace{\frac{(x-t)^p}{p!}}_{=u'(t)} \underbrace{f^{(p+1)}(t)}_{=v(t)} dt = \left[\underbrace{-\frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}}_{=u(t)} \underbrace{f^{(p+1)}(t)}_{=v(t)} \right]_{t=a}^{t=x} - \int_a^x \underbrace{-\frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}}_{=u(t)} \underbrace{f^{(p+2)}(t)}_{=v'(t)} dt$$

$$= \frac{(x-a)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+2)}(t) dt$$

Donc $HR(p+1)$ est vérifiée.

Conclusion : pour tout entier naturel $HR(p)$ est vérifiée. \square

Formule de Taylor pour les polynômes : décomposition dans une base

$$\text{Si } P \in \mathbb{C}_n[X] \text{ alors pour } a \in \mathbb{C}, P(X) = P(a) + P'(a)(X-a) + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

Démonstration : soit f une fonction polynomiale f de degré n . La fonction f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et si l'entier $p > n$ alors $f^{(p)} = 0$ donc la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $p+1$ assure l'égalité précédente.

Une démonstration algébrique consiste à considérer l'égalité précédente comme une décomposition du polynôme P dans une base.

$B_a = (1; X-a; (X-a)^2, \dots; (X-a)^n)$ est une famille libre de $\mathbb{C}_n[X]$ car échelonnée.

De plus $\text{Card}(B_a) = n+1$ or $\dim(\mathbb{C}_n[X]) = n+1$ donc B_a est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Ainsi, il existe $(\alpha_0; \dots; \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1(X-a) + \dots + \alpha_n(X-a)^n$

Or $\forall k \in [0; n]$, et $\forall p \in [0; k]$ $((X-a)^k)^{(p)} = k(k-1)\dots(k-(p-1))(X-a)^{k-p} = \frac{k!}{(k-p)!}(X-a)^{k-p}$

si $p > k$ alors $((X-a)^k)^{(p)} = 0$

Par dérivation successives : $\forall p \in [0; n]$, $P^{(p)}(X) = \alpha_p p! + \alpha_{p+1} \frac{(p+1)!}{(p+1-p)!}(X-a)^{p+1-p} + \dots + \alpha_n \frac{n!}{(n-p)!}(X-a)^{n-p}$

D'où, $P^{(p)}(0) = \alpha_p p!$ ainsi, $\alpha_p = \frac{P^{(p)}(0)}{p!}$ \square

Série de Taylor en 0 : unicité du développement.

Soit I un intervalle contenant 0, si $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ est développable en série entière au voisinage de 0 alors :

$$\text{il existe } R > 0 \text{ tel que }]-R; R[\subset I \text{ et } \forall x \in]-R; R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Démonstration : Soit la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R' et $R \in]0; R'[$ tel que $]-R; R[\subset I$ alors

$\forall x \in]-R; R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors par dérivation terme à terme à l'intérieur de l'intervalle de convergence :

$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R; R[, f^{(p)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)^{(p)} = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-(p-1)) a_n x^{n-p}$

Donc $\forall p \in \mathbb{N}, f^{(p)}(0) = p! a_p$ c'est-à-dire $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$ \square

Fonctions de plusieurs variables réelles

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^p , $a = (a_1; \dots; a_p) \in \Omega$ et $h = (h_1; \dots; h_p)$ tel que $a+h \in \Omega$

Remarque préliminaires : en posant $(x_1; \dots; x_p) = (a_1 + h_1; \dots; a_p + h_p)$ c'est-à-dire $(h_1; \dots; h_p) = (x_1 - a_1; \dots; x_p - a_p)$

$$\text{on a } (x_1; \dots; x_p) \rightarrow (a_1; \dots; a_p) \Leftrightarrow \|(h_1; \dots; h_p)\| \rightarrow 0$$

Formule de Taylor à l'ordre 0 : local

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$f \text{ est continue en } a = (a_1; \dots; a_p) \in \Omega$$

$$\Leftrightarrow \forall h = (h_1; \dots; h_p) \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } a+h \in \Omega, f(a+h) \underset{\|h\| \rightarrow 0}{=} f(a) + o(\|h\|)$$

i.e. $f(a+h) \underset{\|h\| \rightarrow 0}{=} f(a) + o(\|h\|)$

Démonstration : par définition de la limite d'une fonction de plusieurs variables à valeurs dans \mathbb{R}^n :

$$\lim_{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^p}} (f(a+h) - f(a)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|f(a+h) - f(a)\| = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [0; n], \lim_{\|h\| \rightarrow 0} f_i(a+h) - f_i(a) = 0 \quad \square$$

Formule de Taylor à l'ordre 1: existence et unicité du développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de classe C^1 .

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur Ω (ie. $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}$ sont continues sur Ω).

Il existe $M = (m_1 \dots m_p) \in M_{1,p}(\mathbb{R})$ tel que $\forall h = (h_1; \dots; h_p) \in \mathbb{R}^p$ vérifiant $a+h \in \Omega$ on ait :

$$f(a+h) \underset{\|h\| \rightarrow 0}{=} f(a) + (m_1 \dots m_p) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} + o(\|h\|^2)$$

i.e. $f(a+h) \underset{\|h\| \rightarrow 0}{=} f(a) + M \times h + o(\|h\|^2)$

$$\Leftrightarrow (m_{1,1} \dots m_{1,p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1; \dots; a_p) \dots \frac{\partial f}{\partial x_p}(a_1; \dots; a_p) \right) \text{ i.e. } M = \nabla f(a)$$

Démonstration : Pour l'existence, supposons pour simplifier l'écriture $p=3$ et $n=1$ (le cas p quelconque se généralise facilement et pour n quelconque il suffit de travailler sur les n fonctions coordonnées)

$$f(a+h) - f(a) = f(a_1+h_1; a_2+h_2; a_3+h_3) - f(a_1; a_2; a_3)$$

$$= (f(a_1+h_1; a_2+h_2; a_3+h_3) - f(a_1; a_2+h_2; a_3+h_3)) + (f(a_1; a_2+h_2; a_3+h_3) - f(a_1; a_2; a_3+h_3)) - (f(a_1; a_2; a_3+h_3) - f(a_1; a_2; a_3))$$

La fonction $t \mapsto f(t; a_2+h_2; a_3+h_3)$ étant dérivable au voisinage de a_1 , le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un réel $\alpha_1 \in [0; 1]$ (dépendant éventuellement de a_2+h_2 et de a_3+h_3) tel que

$$f(a_1+h_1; a_2+h_2; a_3+h_3) - f(a_1; a_2+h_2; a_3+h_3) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \alpha_1 h_1; a_2+h_2; a_3+h_3)$$

La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ étant supposée continue en a on a : $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \alpha_1 h_1; a_2+h_2; a_3+h_3) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1; a_2; a_3) + o_{\|h\| \rightarrow 0}(1)$

La fonction $t \mapsto f(a_1; t; a_3+h_3)$ étant dérivable au voisinage de a_2 , le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un réel $\alpha_2 \in [0; 1]$ (dépendant éventuellement de a_3+h_3) tel que :

$$f(a_1; a_2+h_2; a_3+h_3) - f(a_1; a_2; a_3+h_3) = h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1; a_2 + \alpha_2 h_2; a_3+h_3)$$

Or la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ étant supposée continue en a , on a : $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1; a_2 + \alpha_2 h_2; a_3+h_3) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1; a_2; a_3) + o_{\|h\| \rightarrow 0}(1)$

La fonction $t \mapsto f(a_1; a_2; t)$ étant dérivable au voisinage de a_3 , le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un réel $\alpha_3 \in [0; 1]$ tel que : $f(a_1; a_2; a_3+h_3) - f(a_1; a_2; a_3) = h_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1; a_2; a_3 + \alpha_3 h_3)$

Or la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ étant supposée continue en a , on a : $\frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1; a_2; a_3 + \alpha_3 h_3) = \frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1; a_2; a_3) + o_{\|h\| \rightarrow 0}(1)$

$$\text{Ainsi : } f(a+h) - f(a) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + h_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) + (h_1+h_2+h_3) o_{\|h\| \rightarrow 0}(1)$$

De plus $|h_1+h_2+h_3| \leq |h_1| + |h_2| + |h_3| \leq 3\|h\|$ donc $(h_1+h_2+h_3) o_{\|h\| \rightarrow 0}(1) = o_{\|h\| \rightarrow 0}(\|h\|)$

Pour l'unicité : soient $A \in L(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n)$ et $B \in L(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n)$ telles que $\forall h \in \mathbb{R}^p$ tel que $a+h \in \Omega$,

$$A(h) + o(\|h\|) = B(h) + o(\|h\|) \text{ alors } (A-B)(h) = o(\|h\|) \text{ donc pour } \|h\| \neq 0, (A-B)\left(\frac{1}{\|h\|}h\right) = o(1)$$

Par passage à la limite quand $\|h\|$ tend vers 0, et par continuité de l'application linéaire $A-B$, l'application linéaire $A-B$ doit s'annuler pour tous les vecteurs unitaires de \mathbb{R}^p ce qui impose $A-B = 0_{L(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n)}$ donc $A=B$. \square

Application au plan tangent à une surface d'équation : $z = f(x; y)$

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 $(a_1; a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(u; v) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(a_1+h_1; a_2+h_2) = f(a_1; a_2) + h_1 \times \frac{\partial f}{\partial x}(a_1; a_2) + h_2 \times \frac{\partial f}{\partial y}(a_1; a_2) + o(\sqrt{h_1^2 + h_2^2})$$

Ainsi, au voisinage du point $(a_1; a_2; f(a_1; a_2))$ de l'espace on a :

$$\begin{pmatrix} a_1+h_1 \\ a_2+h_2 \\ f(a_1+h_1; a_2+h_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ f(a_1; a_2) \end{pmatrix} + h_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(a_1; a_2) \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a_1; a_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ o(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}) \end{pmatrix}$$

Le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x; y)$ au point $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ f(a_1; a_2) \end{pmatrix}$ est donc dirigé par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(a_1; a_2) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a_1; a_2) \end{pmatrix}.$$

Application à une courbe du plan définie implicitement

Pour la courbe \mathcal{C} définie dans le plan par une équation $F(x; y) = 0$, où F est de classe C^1 sur Ω ouvert de \mathbb{R}^2 .

On considère un point $(x_0; y_0) \in \mathcal{C}$ et on pose $(x; y) = (x_0+h_1; y_0+h_2) \in \Omega$ ainsi on a :

$$F(x; y) = F(x_0; y_0) + (x-x_0) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0; y_0) + (y-y_0) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0; y_0) + o(\|(x-x_0; y-y_0)\|)$$

Or $F(x_0; y_0) = 0$ et $M(x; y) \in \Sigma \Leftrightarrow F(x; y) = 0$

$$M(x; y) \in \Sigma \Rightarrow 0 = (x-x_0) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0; y_0) + (y-y_0) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0; y_0) + o(\|(x-x_0; y-y_0)\|)$$

équation cartésienne de la tangente à \mathcal{C} au point de coordonnées $(x_0; y_0)$

Si $(x_0; y_0)$ n'est pas un point critique pour F alors on obtient une approximation affine de l'équation vérifiée par les coordonnées des points appartenant à \mathcal{C} au voisinage de $(x_0; y_0)$.

Ainsi, la tangente à la courbe définie par $F(x; y) = 0$ au point régulier $(x_0; y_0)$ est normale au gradient de F évalué au point $(x_0; y_0)$: $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0; y_0); \frac{\partial F}{\partial y}(x_0; y_0) \right)$.

Application à une surface de l'espace définie implicitement

Pour la surface Σ définie dans l'espace par une équation $F(x; y; z) = 0$, où F est de classe C^1 sur Ω ouvert de \mathbb{R}^3 .

On considère un point $(x_0; y_0; z_0) \in \Sigma$ et on pose $(x; y; z) = (x_0+h_1; y_0+h_2; z_0+h_3) \in \Omega$ ainsi on a :

$$F(x; y; z) = F(x_0; y_0; z_0) + (x-x_0) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0; y_0; z_0) + (y-y_0) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0; y_0; z_0) + (z-z_0) \frac{\partial F}{\partial z}(x_0; y_0; z_0) + o(\|(x-x_0; y-y_0; z-z_0)\|)$$

Or $F(x_0; y_0; z_0) = 0$ et $M(x; y; z) \in \Sigma \Leftrightarrow F(x; y; z) = 0$

$$M(x; y; z) \in \Sigma \Rightarrow 0 = (x-x_0) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0; y_0; z_0) + (y-y_0) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0; y_0; z_0) + (z-z_0) \frac{\partial F}{\partial z}(x_0; y_0; z_0) + o(\|(x-x_0; y-y_0; z-z_0)\|)$$

équation cartésienne du plan tangent à Σ au point de coordonnées $(x_0; y_0; z_0)$

Si $(x_0; y_0; z_0)$ n'est pas un point critique de F , on obtient une approximation affine de l'équation vérifiée par les coordonnées des points appartenant à Σ au voisinage de $(x_0; y_0; z_0)$.

Ainsi, le plan tangent à la surface définie par $F(x; y; z) = 0$ au point régulier $(x_0; y_0; z_0)$ est normal au gradient de F évalué au point $(x_0; y_0; z_0)$: $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0; y_0; z_0); \frac{\partial F}{\partial y}(x_0; y_0; z_0); \frac{\partial F}{\partial z}(x_0; y_0; z_0) \right)$.