Opérations et applications sur les matrices carrées

<u>Matrices inversibles</u> soit $A\in M_n(K)$: $A\in GL_n(K) \Leftrightarrow det(A)\neq 0 \Leftrightarrow \exists B\in M_n(K)$ telle que: $AB=I_n$ $\Leftrightarrow$ $\exists B\in M_n(K)$ telle que: $BA=I_n$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} A=\{0_{K^n}\}$ $\Leftrightarrow$ $0\notin sp(A)$ $\Leftrightarrow$ $rg(A)=n$

	Additivité	Homogénéité	Produit	Puissances, $k\in\mathbb{N}$	Inverse, $A\in GL_n(K)$	Transposée
Puissance $q\in\mathbb{N}$: $M_n(K)\to M_n(K)$ $A\mapsto A^q$	Si AB=BA alors $(A+B)^q=\sum_{i=0}^{q}\binom{q}{i}A^iB^{q-i}$	$\forall\lambda\in K$, $(\lambda A)^q=\lambda^q A^q$	Si AB=BA alors $(AB)^q=A^qB^q$	$(A^k)^q=A^{kq}$	$(A^{-1})^q=(A^q)^{-1}$	$(A^T)^q=(A^q)^T$
Inverse : $\cdot^{-1}: GL_n(K)\to GL_n(K)$ $A\mapsto A^{-1}$ tq $AA^{-1}=I_n$	En général $(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$	$\forall\lambda\in K^*$, $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$	$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$	$(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$	$(A^{-1})^{-1}=A$	$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$
Transposée : $\cdot^T$: $M_n(K)\to M_n(K)$ $(a_{ij})\mapsto(a_{ji})$	$(A+B)^T=A^T+B^T$	$\forall\lambda\in K$, $(\lambda)^T=\lambda A^T$	$(AB)^T=B^TA^T$	$(A^k)^T=(A^T)^k$	$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$	$(A^T)^T=A$
Trace : Tr : $M_n(K)\to K$ $(a_{ij})\mapsto\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$	$Tr(A+B)=Tr(A)+Tr(B)$	$\forall\lambda\in K$, $Tr(\lambda A)=\lambda Tr(A)$	$Tr(AB)=Tr(BA)$ En général, $Tr(AB)\neq Tr(A)\times Tr(B)$	Si A est trigonalisable alors $Tr(A^k)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i)^k$	Si A est trigonalisable alors $Tr(A^{-1})=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}$	$Tr(A^T)=Tr(A)$
Déterminant : det : $M_n(K)\to K$ unique forme n-linéaire alternée tq : $det(I_n)=1$	En général $det(A+B)\neq det(A)+det(B)$	$\forall\lambda\in K$, $det(\lambda A)=\lambda^n det(A)$	$det(AB)=det(A)\times det(B)$	$det(A^k)=(det(A))^k$	$det(A^{-1})=\frac{1}{det(A)}$	$det(A^T)=det(A)$
Rang : $rg: M_n(K)\to[0;n]$ $A\mapsto dim(vect\{(a_{i1})_{i\in[1;n]};\dots;(a_{in})_{i\in[1;n]}\})$	$rg(A+B)\leqslant rg(A)+rg(B)$	si $\lambda\neq 0$, $rg(\lambda A)=rg(A)$	$rg(AB)\leqslant min(rg(A);rg(B))$ si $B\in GL_n(K)$ alors $rg(AB)=rg(A)$	$rg(A^k)\leqslant rg(A)$	$rg(A)=rg(A^{-1})=n$	$rg(A^T)=rg(A)$
Norme eucl. can. : $\Vert.\Vert: M_n(K)\to\mathbb{R}^+$ $A\mapsto\sqrt{Tr(A^T\times A)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j})^2}$	$\Vert A+B\Vert\leqslant\Vert A\Vert+\Vert B\Vert$	$\forall\lambda\in K$, $\Vert\lambda A\Vert=\lvert\lambda\rvert\times\Vert A\Vert$	Hors programme : $\Vert AB\Vert\leqslant\Vert A\Vert\times\Vert B\Vert$	Hors programme : $\Vert A^k\Vert\leqslant(\Vert A\Vert)^k$	Hors programme : $\Vert A^{-1}\Vert\geqslant\frac{1}{\Vert A\Vert}$	$\Vert A^T\Vert=\Vert A\Vert$

Matrices semblables : $A\in M_n(K)$ et $B\in M_n(K)$ sont semblables si et seulement s'il existe $P\in GL_n(K)$ telle que $B=P^{-1}AP$

<u>Invariants</u>

Trace : $Tr(A)=Tr(B)$
Déterminant : $det(A)=det(B)$
Polynôme caractéristique : $\chi_A(X)=\chi_B(X)$ conséquence sur le spectre : $sp(A)=sp(B)$
Rang : rg(A)=rg(B)

<u>Non invariants</u>

Puissances : $B^k=P^{-1}A^kP$
Inverse si $A\in GL_n(K)$ alors $B\in GL_n(K)$ et $B^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$
Transposée : en général $B^T\neq P^{-1}A^TP$
Norme euclidienne canonique : en général $\Vert A\Vert\neq\Vert B\Vert$

Espace euclidien $M_{n,1}(\mathbb{R})$

Matrices réelles orthogonales

Définition : $A\in O(n)$ $\Leftrightarrow$ $A^T=A^{-1}$
Propriétés : $det(A)=\pm 1$; $sp(A)\subset\{-1;1\}$
Dans un e.v. E de dimension n muni d'une base orthonormale B $f\in O(E)\Leftrightarrow Mat_B(f)\in O(n)$
Changement de base : Si $A\in O(n)$ alors $\forall P\in O(n)$, $P^TAP\in O(n)$
A connaître : classification de O(2) et O(3)...
⚠ La matrice d'une projection orthogonale dans une base orthonormale n'est pas orthogonale !

Matrices réelles symétriques

Définition : $A\in S(n)$ $\Leftrightarrow$ $A^T=A$
Changement de base : Si $A\in S(n)$ alors $\forall P\in O(n)$, $P^TAP\in S(n)$
Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique sont orthogonaux dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire euclidien canonique.
Diagonalisation : Si $A\in S(n)$ alors $\exists P\in O(n)$ telle que P^TAP soit diagonale.
⚠ Un endomorphisme ayant une matrice symétrique dans une base orthonormale n'est pas nécessairement une symétrie !

$A\in O(n)\cap S(n)$ $\Rightarrow$ $A^2=I_n$, donc pour B une base et $Mat_B(f)=A$, f est une symétrie. Si de plus B est orthonormale alors f est une symétrie orthogonale.