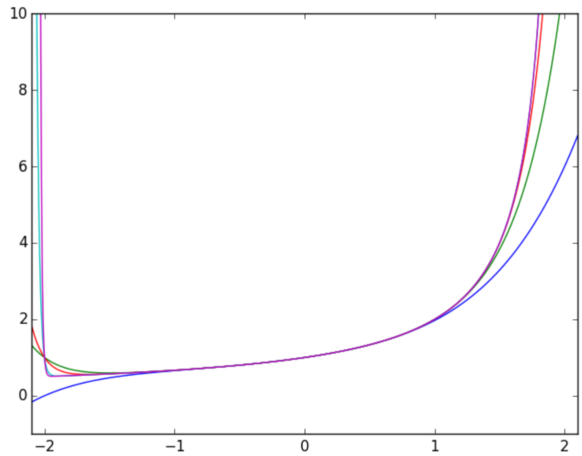
Séries entières

1. Convergence d'une série entière

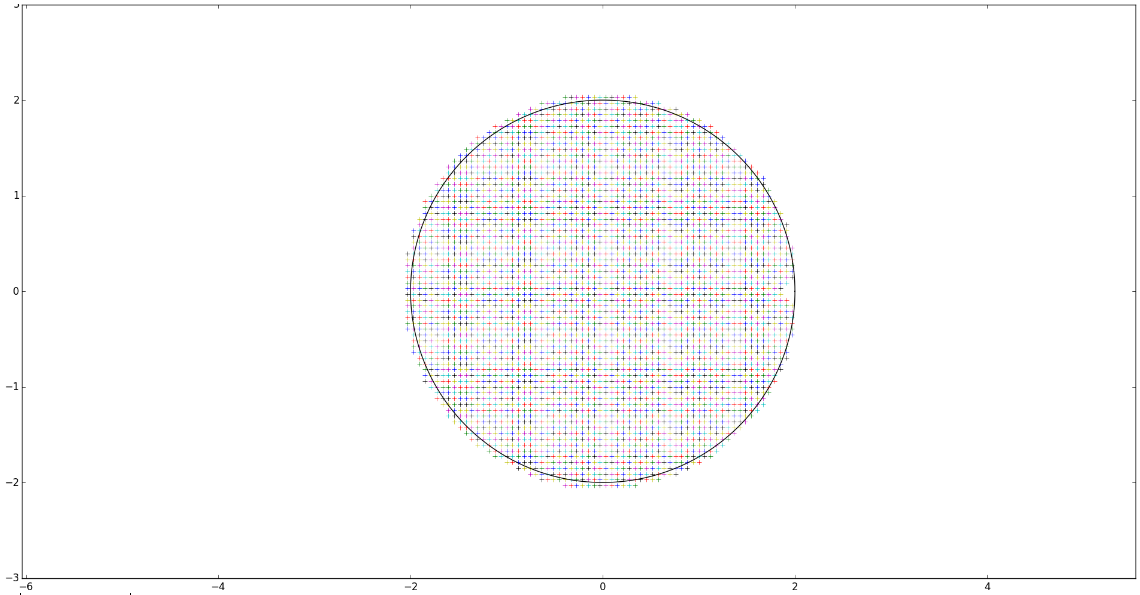
Exemple de code Python permettant de visualiser les représentations graphiques de fonctions de variable réelle $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} x^k$ pour différentes valeurs de n.

```python
def S(x,n):
    return sum((1/2**k)*x**k for k in range(n+1))

import numpy as np
X=np.linspace(-2.1,2.1,1000)
import matplotlib.pyplot as plt
plt.axis([-2.1,2.1,-1,10])
for k in [5,10,20,100,200]:
    Y=[S(x,k) for x in X]
    plt.plot(X,Y)
plt.show()
```



Exemple de code Python permettant de visualiser dans le plan complexe les points d'affixe z telle que $\left|\sum_{k=0}^{100} \frac{1}{2^k} z^k\right| < 20$

```python
def S(z,n):
    return sum((1/2**k)*complex(z)**k for k in range(n+1))

import numpy as np
Z=[x+y*1j for x in np.linspace(-3,3,100) for y in np.linspace(-3,3,100)]
import matplotlib.pyplot as plt
plt.axis('equal')
for z in Z:
    fz=S(z,100)
    if abs(fz)<20 :
        plt.plot(z.real,z.imag,marker='+')
T=np.linspace(0,2*np.pi,1000)
plt.plot([2*np.cos(t) for t in T],[2*np.sin(t) for t in T],color='black')
plt.show()
```



⚠ Le critère $\left|\sum_{k=0}^{100} \frac{1}{2^k} z^k\right| < 20$ ne prouve en aucun cas la convergence ou la divergence de la série numérique $\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{2^k} z^k$

Définition d'une série entière d'une variable réelle ou complexe

Soit (a_n) une suite de nombres complexes.

Soit $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $a_n x^n$, notée $\sum a_n x^n$ est appelée série entière de variable réelle x.

Soit $z \in \mathbb{C}$, la série de terme général $a_n z^n$, notée $\sum a_n z^n$ est appelée série entière de variable complexe z.

Rappel : $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^0 \overset{\text{def}}{=} 1$, ce qui implique en particulier qu'ici $0^0 \overset{\text{def}}{=} 1$.
Remarques : le qualificatif « entière » désigne l'exposant des puissances de x ou de z.

Les sommes partielles de la série $\sum a_n x^n$ ou $\sum a_n z^n$ dépendent ici de la variable complexe x ou z.

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ sont des fonctions polynomiales définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

⚠ $x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ et $z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ ne sont pas nécessairement des fonctions polynomiales et leur ensemble de définition n'est pas nécessairement $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Remarque : Une série de type $\sum b_n z^{2n}$ par exemple, est appelée série lacunaire car …

Exemples : si pour tout entier naturel n, $a_n = (-1)^n$ alors la série entière $\sum a_n z^n$ est la suite des sommes partielles :

$S_0(z) = \ldots$ $\qquad$ $S_1(z) = \ldots$ $\qquad$ $S_2(z) = \ldots$

Si $|z| < 1$ alors $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^k = \ldots$

Lemme d'Abel : condition suffisante de convergence d'une série entière sur un disque ouvert

Soit (a_n) une suite de nombres complexes et un réel $r > 0$.

Si la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration : Soit un réel $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n|(r)^n \leqslant M$

Par ailleurs, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|a_n z^n| = |a_n||z|^n = |a_n|(r)^n \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leqslant M \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$

Ainsi, si $|z| < r$ alors $0 \leqslant \frac{|z|}{r} < 1$ donc la série numérique $\sum M \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$ est une série géométrique convergente.

Ainsi, d'après le critère de majoration pour les séries à termes positifs, la série $\sum |a_n z^n|$ est convergente. □

Remarque : l'ensemble $I=\{r\in\mathbb{R}^+ | \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ est un intervalle du type $[0;R[$ ou $[0;R]$.
En effet, si $r_0\in I$ alors $(|a_n| r^n)$ est bornée, donc $\forall r\in[0;r_0]$, la suite $(|a_n| r^n)$ est bornée, ainsi $[0;r_0]\subset I$.
Cette propriété de connexité caractérise les intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition du rayon de convergence d'une série entière

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

Le rayon de convergence de cette série est : $R \overset{\text{def}}{=} \sup\{r\in\mathbb{R}^+ | \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$.

Remarque : le rayon de convergence est une borne supérieure d'un intervalle de $\mathbb{R}^+$ donc le rayon de convergence d'une série entière peut être un réel positif ou $+\infty$.

Théorème sur la nature d'une série entière d'une variable complexe

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence.

► $\forall z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<R$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

► $\forall z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|>R$, la série $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente car la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.

Démonstration :
1) Si $|z|<R$ alors il existe $r\in]|z|;R[$ donc, par définition de R la suite $(a_n r^n)$ est bornée, ainsi, d'après le lemme d'Abel, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

2) Si $|z|>R$, supposons par l'absurde que la suite $(a_n z^n)$ soit bornée.
Alors en posant $r=|z|$, on a $(a_n r^n)$ bornée et $r>R$ ce qui contredit la définition de R.

La suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée donc pas convergente, la série $\sum a_n z^n$ est donc grossièrement divergente. □

⚠ Pour $|z|=R$ la série $\sum a_n z^n$ peut être absolument convergente, convergente ou divergente.

Définitions du disque ouvert de convergence et de l'intervalle ouvert de convergence

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de variable complexe et R son rayon de convergence. Le disque ouvert de centre 0 et de rayon R, noté $D \overset{\text{def}}{=} \{z\in\mathbb{C} | |z|<R\}$, est appelée disque ouvert de convergence de $\sum a_n z^n$.

L'application : $\begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array}$ est appelée <u>fonction somme</u> de $\sum a_n z^n$.

Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de variable réelle et R son rayon de convergence. L'intervalle $]-R;R[$ est appelé intervalle ouvert de convergence de $\sum a_n x^n$

L'application : $\begin{array}{ccc}]-R;R[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$ est appelée <u>fonction somme</u> de la série entière $\sum a_n x^n$.

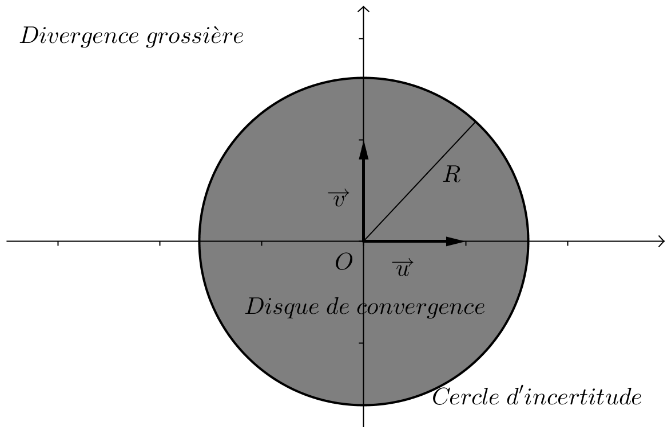
Remarque : si R=0 alors ...

Si $\mathrm{R}=+\infty$ alors...

Remarque : le rayon de convergence peut être défini de façon analogue par :

$$\mathrm{R}=\sup\left\{r\in\mathbb{R}^+ \middle| \text{la série } \sum a_n r^n \text{ converge}\right\}$$

L'ensemble de définition de la fonction somme peut être étendu aux points du cercle d'incertitude pour lesquels la série $\sum a_n z^n$ converge.



Méthodes utilisant les séries numériques pour déterminer le rayon de convergence

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ et $z_0\in\mathbb{C}$.

- ► Si la série numérique $\sum a_n (z_0)^n$ est absolument convergente alors $\mathrm{R}\geqslant|z_0|$
- ► Si la série numérique $\sum a_n (z_0)^n$ est convergente mais pas absolument convergente alors $\mathrm{R}=|z_0|$
- ► Si la série numérique $\sum a_n (z_0)^n$ est grossièrement divergente alors $\mathrm{R}\leqslant|z_0|$
- ► Si (la série numérique $\sum a_n z^n$ converge si et seulement si $|z|\leqslant|z_0|$) alors $\mathrm{R}=|z_0|$
- ► Si (la série numérique $\sum a_n z^n$ converge si et seulement si $|z|<|z_0|$) alors $\mathrm{R}=|z_0|$

Exemple : pour la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}z^n$ on a : pour $r=1$ ...

Et pour $r=-1$ … Donc...

Critères d'équivalence ou de comparaison des modules des termes généraux

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b :

- ► critère d'équivalence : si $|a_n|\underset{+\infty}{\sim}|b_n|$ alors $\mathrm{R}_a=\mathrm{R}_b$
- ► critère de comparaison : si $\forall n\in\mathbb{N}$, $|a_n|\leqslant|b_n|$ alors $\mathrm{R}_a\geqslant\mathrm{R}_b$

Démonstration : ► Si $|a_n|\underset{+\infty}{\sim}|b_n|$ alors pour tout réel $r>0$, $|a_n|r^n\underset{n\to+\infty}{\sim}|b_n|r^n$

Ainsi : $(a_n r^n)$ est bornée si et seulement si $(b_n r^n)$ est bornée

Donc $\{r\in\mathbb{R}^+|\text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}=\{r\in\mathbb{R}^+|\text{la suite } (b_n r^n) \text{ est bornée}\}$, donc $\mathrm{R}_a=\mathrm{R}_b$.

► Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $|a_n|\leqslant|b_n|$ alors pour tout réel $r>0$, $|a_n|r^n\leqslant|b_n|r^n$

Ainsi : Si la suite $(b_n r^n)$ est bornée alors la suite $(a_n r^n)$ est bornée

Donc : $\{r\in\mathbb{R}^+|\text{la suite } (b_n r^n) \text{ est bornée}\}\subset\{r\in\mathbb{R}^+|\text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$

Ainsi : $\mathrm{R}_b\leqslant\mathrm{R}_a$ □

Remarque : il suffit que $|a_n|\leqslant|b_n|$ soit vérifiée à partir d'un certain rang pour pouvoir affirmer $\mathrm{R}_a\geqslant\mathrm{R}_b$.

Propriété de conservation du rayon de convergence par multiplication du terme général par n

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Remarque : en utilisant cette propriété, on peut démontrer par le critère d'équivalence puis par récurrence que, quelle que soit le polynôme P ou la fraction rationnelle Q, les séries entières $\sum P(n)a_n z^n$ et $\sum Q(n)a_n z^n$ ont le même rayon de convergence que celui de la série entière $\sum a_n z^n$.

Démonstration : Soit R et R' les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant n$ donc $|a_n| \leqslant n|a_n|$ donc, d'après le critère de comparaison, $R \geqslant R'$.
Supposons, par l'absurde, $R > R'$ alors il existe $r \in \mathbb{R}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que : $R' < |z_0| < r < R$

$$\begin{cases} R' < |z_0| \Rightarrow \text{la suite } \left(n a_n (z_0)^n\right) \text{ est non bornée} \\ r < R \Rightarrow \text{la suite } \left(a_n r^n\right) \text{ est bornée par } M>0 \end{cases}$$

Or $n|a_n(z_0)^n| = n|a_n|\left(\frac{|z_0|^n}{r^n}\right)r^n = \left(|a_n|r^n\right)\left(n\left(\frac{|z_0|}{r}\right)^n\right) \leqslant M n\left(\frac{|z_0|}{r}\right)^n$

or $0 \leqslant \frac{|z_0|}{r} < 1$ donc en posant $q = \frac{|z_0|}{r}$, on a : $n q^n = e^{\ln(n)+n\ln(q)}$ avec $\ln(q) < 0$

En vertu des croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n)+n\ln(q) = -\infty$ donc par composition $\lim\limits_{n\to+\infty} n q^n = 0$.

Ainsi par application du théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} n|a_n(z_0)^n| = 0$ ce qui contredit le fait que la suite $\left(n a_n (z_0)^n\right)$ soit bornée. □

Remarque : la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1} = \sum (n+1) a_{n+1} z^n$ est appelée dérivée formelle de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exemple : pour la série $\sum n 2^n z^{2n}$ …

Méthode : détermination du rayon de convergence à l'aide de la règle de d'Alembert

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ et R son rayon de convergence.

Soit un réel $r>0$, la règle de d'Alembert appliqué à la série $\sum |a_n| r^n$ considère le quotient : $\frac{|a_{n+1}|r^{n+1}}{|a_n|r^n} = r \times \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

► Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|r^{n+1}}{|a_n|r^n} = r \times L$

Ainsi, $\forall r \in \left]0 ; \frac{1}{L}\right[$, $r \times L < 1$ donc, d'après la règle de d'Alembert pour les séries à termes positifs, la série $\sum |a_n| r^n$ converge.

En revanche, $\forall r \in \left]\frac{1}{L} ; +\infty\right[$, $r \times L > 1$ donc, d'après la règle de d'Alembert pour les séries à termes positifs, la série $\sum |a_n| r^n$ diverge.

Conclusion : $R = \frac{1}{L}$.

► Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ alors $\forall r>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|r^{n+1}}{|a_n|r^n} = r \times 0 = 0 < 1$ donc, d'après la règle de d'Alembert pour les séries à termes positifs, la série $\sum |a_n| r^n$ converge. Ce raisonnement étant valide pour tout réel r positif, $R = +\infty$.

► Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$ alors $\forall r>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|r^{n+1}}{|a_n|r^n} = +\infty$ donc, d'après la règle de d'Alembert pour les séries à termes positifs, la série $\sum |a_n| r^n$ diverge. Ce raisonnement étant valide pour tout réel r positif, on a $R = 0$.

Exemples : $\sum \frac{1}{n!} z^n$ ... et $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$ ...

⚠ Pour les séries lacunaires du type : $\sum b_n z^{pn+q}$ le critère de d'Alembert ne peut s'appliquer car $a_n=0$ pour $n \notin p\mathbb{N}+q$. Deux méthodes permettent de contourner ce problème :

►Ou bien écrire $\sum b_n z^{pn+q} = z^q \sum b_n (z^p)^n$ et poser $Z=z^p$ pour appliquer le critère de d'Alembert à la série entière de variable Z, $\sum b_n Z^n$.

►Ou bien, pour $r>0$, envisager la limite du quotient $\dfrac{|b_{n+1}| r^{p(n+1)+q}}{|b_n| r^{pn+q}} = \dfrac{|b_{n+1}|}{|b_n|} r^p$ en fonction des valeurs de r ...

Rayon de convergence et somme de la série entière obtenue par opérations sur des séries entières

Soients $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R>0$ et $R'>0$ et un scalaire $\lambda \neq 0$.

► Produit par un scalaire : $\sum \lambda a_n z^n$ a pour rayon de convergence R

$$\text{et si } |z|<R \text{ alors } \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

► Cas des séries lacunaires : pour $(q;r) \in \mathbb{N}^2$, $\sum a_n z^{qn+r}$ a pour rayon de convergence $R^{\frac{1}{q}}$

$$\text{et si } |z|<R^{\frac{1}{q}} \text{ alors } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{qn+r} = z^r \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z^q)^n$$

► Série somme de deux séries entières : $\sum (a_n+b_n) z^n$ a un rayon de convergence $R_S \geqslant \min(R;R')$

$$\text{et, si } |z|<\min(R;R') \text{ alors } \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n+b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

► Série produit (hors programme) : $\sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n$ a un rayon de convergence $R_P \geqslant \min(R;R')$

$$\text{et, si } |z|<\min(R;R') \text{ alors } \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

Démonstration : par passage à la limite sur des sommes partielles.

2. Somme d'une série entière d'une variable réelle

Définition de l'intervalle de convergence d'une série entière à variable réelle

Soients $\sum a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle, et R son rayon de convergence.

$$\text{L'intervalle de convergence est l'intervalle } I = \left\{ x \in \mathbb{R} \,|\, \text{la série } \sum a_n x^n \text{ converge} \right\} .$$

►Si $R=+\infty$ alors $I =]-\infty;+\infty[$

►Si R est un réel strictement positif alors $I =]-R;R[$, ou $I =]-R;R]$, ou $I = [-R;R[$ ou $I = [-R;R]$ selon la nature des séries $\sum a_n (-R)^n$ et $\sum a_n R^n$.

La fonction $\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$ est appelée fonction somme de la série entière $\sum a_n x^n$.

Exemples :

La série $\sum_{n \geqslant 1} x^n$ a pour intervalle de convergence ...

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} x^n$ a pour intervalle de convergence …

Propriétés de la fonction somme d'une série entière de variable réelle

Soient $\sum a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle de rayon de convergence $R>0$, et la fonction somme f définie sur l'intervalle $]-R;R[$ par : $\forall x\in]-R;R[, f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

► La fonction f est continue sur l'intervalle $]-R;R[$.

► La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-R;R[$, sa dérivée est la fonction somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$ dont le rayon de convergence est R : $\forall x\in]-R;R[, f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ « dérivation terme à terme »

► La fonction f admet pour primitive la fonction somme de la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ dont le rayon de convergence est R : $\forall x\in]-R;R[, \int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ « intégration terme à terme »

⚠ On n'obtient ici LA primitive s'annulant en 0.

Pour déterminer TOUTES les primitives F de f sur $]-R;R[$, on utilise : $F(x)=F(0)+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

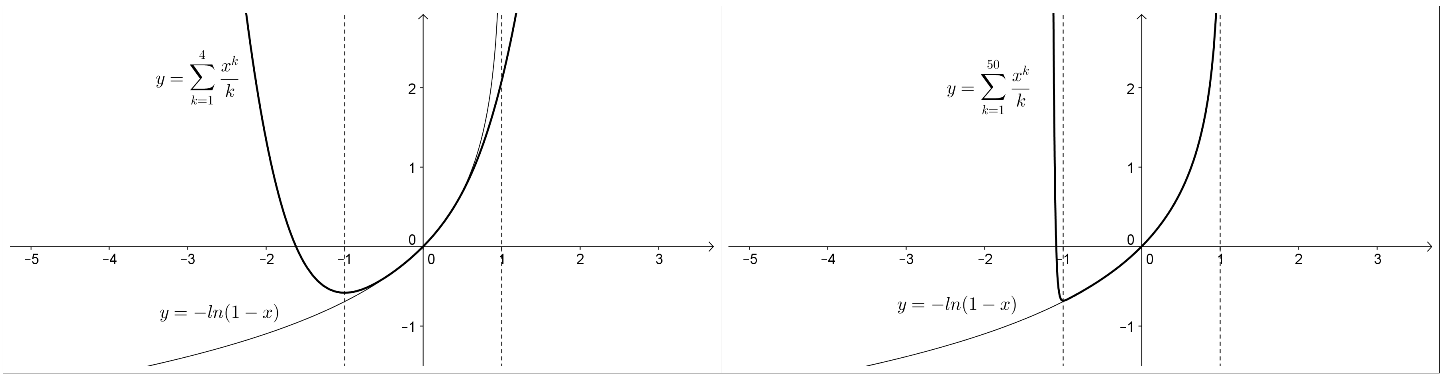
Propriétés admises.

Exemple : la fonction $f: x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$ est continue sur l'intervalle $]-1;1[$ (cf précédemment) et f est dérivable sur $]-1;1[$: $\forall x\in]-1;1[, \ f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty} x^n=\frac{1}{1-x}$

Ainsi, $\forall x\in]-1;1[, \ f(x)=\int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t+f(0)=-\ln(1-x)$

Exemple de code Python représentant graphiquement la convergence des sommes partielles :

```python
def Sn(x,n):
    return sum(((1/k)*x**k) for k in range(1,n+1))

import numpy as np
def S(x):
    return -np.log(1-x)

X=[-1+i/100 for i in range(1,200)]
Y5=[Sn(x,5) for x in X]
Y=[S(x) for x in X]
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(X,Y5)
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```



Les fonctions f et $x \mapsto -\ln(1-x)$ sont continues sur $]-1;1[$ donc par passage à la limite quand x tend vers $-\dfrac{1}{2}$ dans l'égalité précédente, on a : $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=-\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)=\ln(2)-\ln(3)$ d'où : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\ln(2)-\ln(3)$.

Exemple de code Python utilisant le module sympy pour retrouver les résultats précédents :

```
from sympy import *
n,x  = symbols('n x')

pprint(summation((1/n)*x**n, (n, 1, oo)))
pprint(summation((1/n)*(-1/2)**n, (n, 1, oo)))
pprint(float(ln(2)-ln(3)))
```

Corollaire sur les dérivées successives de la fonction somme d'une série entière

Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et f sa somme : $\forall x \in]-\mathrm{R};\mathrm{R}[,\ f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

En appliquant k fois la propriété de dérivabilité, la fonction f est de classe C^∞ sur l'intervalle $]-\mathrm{R};\mathrm{R}[$ et

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-\mathrm{R};\mathrm{R}[,\ f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{(n-k)!}a_n x^{n-k}}$$

et en particulier $\boxed{f^{(k)}(0)=k!\,a_k}$

Démonstration : par récurrence sur k .
Évaluation en 0 en utilisant $0^0 \overset{\text{def}}{=} 1$ et $\forall n>0,\ 0^n=0$. □

3. Fonctions développables en série entière.

Définition des fonctions développables en série entière autour de zéro

Soit f une fonction définie sur un intervalle réel I contenant 0 et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

La fonction f est développable en série entière autour de 0 si et seulement s'il existe : une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R et un intervalle I' contenant 0 tels que : $\begin{cases} \mathrm{I}' \subset \mathrm{I} \\ \forall x \in \mathrm{I}',\ f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{cases}$

Exemple : la fonction $\begin{array}{cccc} f: &]-\infty;1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & -\ln(1-x) \end{array}$ est développable en série entière au voisinage de 0 car,

$$\forall \in]-1;1[,\ f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n$$

Unicité du développement en série entière

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières dont les intervalles de convergence contiennent un intervalle ouvert I contenant 0.

$$\boxed{\text{Si } \forall x \in \mathrm{I},\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N}, a_n=b_n}$$

$$\boxed{\text{Si } \forall x \in \mathrm{I},\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=0 \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N}, a_n=0}$$

Démonstration : soit f et g les fonctions sommes des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$: $\forall x \in \mathrm{I},\ f(x)=g(x)$

Or I étant un intervalle ouvert contenant 0 , on a $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0)=g^{(n)}(0)$
Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n=b_n$.
La linéarité de l'application qui à une série entière associe sa fonction somme assure l'équivalence des deux formulations.

Méthode : recherche des solutions développables en séries entières d'une équation différentielle (E) linéaire à coefficients polynomiaux.

Soit $R>0$ et $\forall t\in]-R,R[$, $f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

1) Injecter f dans l'équation différentielle : f est solution de (E) sur $]-R;R[$ $\Leftrightarrow \dots$
2) Modifier les indices des sommes pour avoir t^n dans chacune
3) Isoler les termes qui ne sont pas présents dans toutes les sommes, puis la linéarité pour avoir une seule somme
4) Utiliser l'unicité du développement en série entière pour identifier les coefficients a_n
5) Calculer R et déterminer f à l'aide des fonctions de référence.

Développements en séries entières à connaître

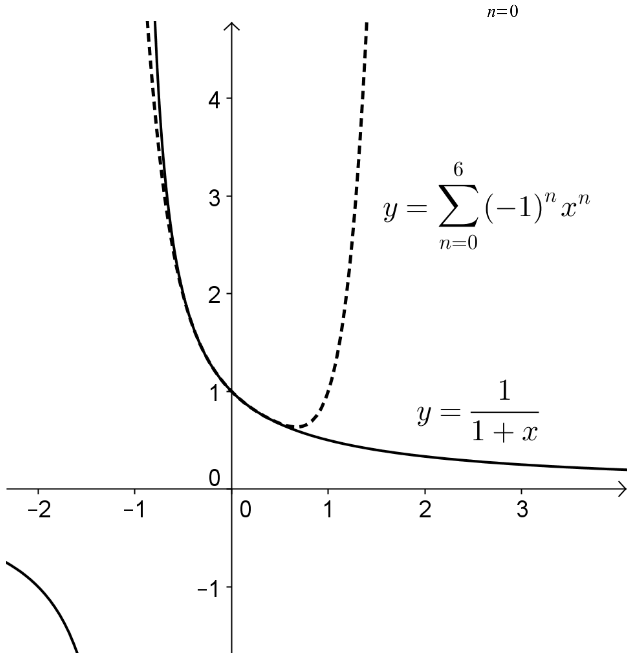
$\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $\cos(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$	$\forall x\in]-1;1[$, $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ i.e. $\forall x\in]-1;1[$, $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ $\forall x\in]-1;1]$, $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ i.e. $\forall x\in[-1;1[$, $-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ Soit $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\forall x\in]-1;1[$, $(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}x^n$

Démonstrations :

► Pour $x\mapsto\frac{1}{1+x}$, on utilise la somme d'une série géométrique: $\sum_{n=0}^{k}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{k}(-x)^n=\frac{1-(-x)^{k+1}}{1-(-x)}=\frac{1-(-x)^{k+1}}{1+x}$

Ainsi, si $|-x|<-1$, $\lim_{k\to+\infty}(-x)^{k+1}=0$ d'où : $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}$.

⚠ La fonction $x\mapsto\frac{1}{1+x}$ est continue en 1 mais la fonction somme $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ n'est pas continue en 1.



► Pour $x\mapsto\ln(1+x)$, il suffit d'utiliser la primitive de $x\mapsto\frac{1}{1+x}$ s'annulant en 0.

Ainsi : $\forall x\in]-1;1[$, $\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$.

De plus, pour $x=1$, $\sum\frac{(-1)^n}{n+1}$ est une série alternée pour laquelle le critère spécial de convergence des séries alternées peut s'appliquer donc la série $\sum\frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente.

Ainsi, les fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ sont continues sur l'intervalle $]-1\,;1]$, ainsi :

$$\forall x \in]-1\,;1],\ \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{(1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

► Pour $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$, il suffit d'utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange :
Soit I un intervalle réel, f une fonction de classe $\mathrm{C}^{k+1}(\mathrm{I};\mathbb{R})$ et deux réels $a \in \mathrm{I}$ et $b \in \mathrm{I}$:

$$\left| f(b) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \right| \leqslant \frac{|b-a|^{k+1}}{(k+1)!} \sup_{t \in [a\,;b]} \left| f^{(k+1)}(t) \right|$$

La fonction exponentielle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp^{(n)}(x) = \exp(x)$.

De plus la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\begin{cases} x>0 \Rightarrow \sup\limits_{t \in [0\,;x]} |\exp(t)| = \exp(x) \\ x<0 \Rightarrow \sup\limits_{t \in [x;0]} |\exp(t)| = \exp(0) = 1 \end{cases}$

$$\text{Donc : } \forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left| \mathrm{e}^x - \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} x^n \right| \leqslant \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \max(1\,;\mathrm{e}^x)$$

La série entière $\sum \frac{1}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $\mathrm{R} = +\infty$ (règle de d'Alembert), ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} = 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \left| \mathrm{e}^x - \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} x^n \right| = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$

La fonction cosinus étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ donc $\cos^{(n)}(0) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

De plus $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos(x)| \leqslant 1$ donc : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left| \cos(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \right| \leqslant \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \times 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} = 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \left| \cos(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \right| = 0$ ainsi, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

La démarche est analogue pour la fonction sinus, en sachant que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

► Pour $x \mapsto (1+x)^\alpha$.
La fonction $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de classe C^∞ sur $]-1\,;+\infty[$ car pour tout réel $x > -1$, $1+x > 0$ donc $(1+x)^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(1+x)}$
De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(f_\alpha)^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$ donc $(f_\alpha)^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))$

Si $n > \alpha$ alors la fonction $x \to (1+x)^{\alpha-n}$ est décroissante sur $]-1\,;+\infty[$ donc : $\begin{cases} x>0 \Rightarrow \sup\limits_{t \in [0\,;x]} \left|(1+x)^{\alpha-n}\right| = (1+0)^{\alpha-n} = 1 \\ -1<x<0 \Rightarrow \sup\limits_{t \in [x;0]} \left|(1+x)^{\alpha-n}\right| = (1+x)^{\alpha-n} \end{cases}$

Pour tout entier $k > \alpha$, $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $\left| (1+x)^\alpha - \left(1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n \right) \right| \leqslant \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} |\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)| \times 1$

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(\alpha-n)}{(n+1)!}}{\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}} = \left(\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(\alpha-n)}{(n+1)!} \right) \times \left(\frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))} \right) = \frac{\alpha-n}{n+1}$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right| = 1$ donc la série entière $\sum \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $\mathrm{R} = 1$

Ainsi, $\forall x \in]0\,;1[$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} |\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)| = 0$ donc $\forall x \in [0\,;1[$, $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$
Remarque : si $\alpha < -1$ alors cette égalité peut être prolongée en $x = 1$ en appliquant le critère spécial des séries alternées à la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}$ qui est alternée à partir du rang $n_0 = \mathrm{E}(\alpha)$.

Pour tout $k > \alpha$, $\forall x \in]-1\,;0[$, $\left| (1+x)^\alpha - \left(1 + \sum_{n=0}^{k} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n \right) \right| \leqslant \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} |\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)| \times (1+x)^{\alpha-(k+1)}$

$$\left| (1+x)^\alpha - \left(1 + \sum_{n=0}^{k} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n \right) \right| \leqslant \left| \frac{x}{x+1} \right|^{k+1} \times \frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)|}{(k+1)!} \times (1+x)^\alpha$$

Si $-1<x<-\dfrac{1}{2}$ alors $2x<-1$ d'où $x<-x-1$ ainsi $\dfrac{x}{x+1}<-1$ (car $x+1>0$) d'où : $\lim\limits_{k\to+\infty}\left|\dfrac{x}{x+1}\right|^{k+1}=+\infty$

Ici cette inégalité n'est pas suffisamment précise pour assurer la convergence désirée. L'égalité de Taylor-Lagrange avec reste intégrale permet davantage de précision sous les même hypothèses que l'inégalité :

$$f(b)-\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n=\int_a^b\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(b-t)^k\,\mathrm{d}t$$

$$\forall x\in]-1;0],(1+x)^{\alpha}-\left(1+\sum_{n=0}^{k}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n\right)=\int_0^x\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)(1+t)^{\alpha-(k+1)}}{k!}(x-t)^k\,\mathrm{d}t$$

$$\forall x\in]-1;0],(1+x)^{\alpha}-\left(1+\sum_{n=0}^{k}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n\right)=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)}{k!}\int_0^x(1+t)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^k\mathrm{d}t$$

Ici, on a : $-1<x\leqslant t\leqslant 0$ donc $\begin{cases}x-t\leqslant 0\\0<1+t\end{cases}$ donc le signe de $\int_0^x(1+t)^{\alpha-1}\left(\dfrac{x-t}{1+t}\right)^k\mathrm{d}t$ dépend de la parité de l'entier k .

$$\left|\int_0^x(1+t)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^k\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_x^0(1+t)^{\alpha-1}\left|\frac{x-t}{1+t}\right|^k\mathrm{d}t$$

Or, pour $-1<x\leqslant t\leqslant 0$, $\left|\dfrac{x-t}{1+t}\right|=\dfrac{t-x}{1+t}$ or $-t>xt$ donc $t<-xt$ ainsi $t-x<-x-xt=-x(1+t)$ donc $\dfrac{t-x}{1+t}<-x$ d'où :

$$\left|\int_0^x(1+t)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^k\mathrm{d}t\right|\leqslant(-x)^k\int_x^0(1+t)^{\alpha-1}\mathrm{d}t=(-x)^k\left[\frac{(1+t)^{\alpha}}{\alpha}\right]_x^0=(-x)^k\left(1-\frac{(1+x)^{\alpha}}{\alpha}\right)$$

$$\forall x\in]-1;0],\left|(1+x)^{\alpha}-\left(1+\sum_{n=0}^{k}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n\right)\right|\leqslant\frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)|}{k!}(-x)^k\left(1-\frac{(1+x)^{\alpha}}{\alpha}\right)$$

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)}{k!}$ a pour rayon de convergence $\mathrm{R}=1$

donc $\forall x\in]-1;0]$, $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)|}{k!}(-x)^k=0$ donc $\forall x\in]-1;0]$, $(1+x)^{\alpha}=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n$.□

Remarque : ces résultats peuvent aussi être démontrés à l'aide d'équations différentielles vérifiées par les séries entières :

$\begin{cases}y'=y\\y(0)=1\end{cases}$ sur $\mathbb{R}$; $\begin{cases}y''=-y\\y(0)=1\\y'(0)=0\end{cases}$ sur $\mathbb{R}$; $\begin{cases}y''=-y\\y(0)=0\\y'(0)=1\end{cases}$ sur $\mathbb{R}$; $\begin{cases}(1+x)y'=\alpha y\\y(0)=1\end{cases}$ sur $]-1;+\infty[$

Exemple : $\forall x\in]-1;1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dots$

Remarque : Le produit d'entiers pairs consécutifs peut s'exprimer grâce aux factorielles : $\boxed{\prod_{k=1}^{n}2k=2^n n!}$

Ainsi, le produit d'entiers impairs consécutifs donne : $\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)=\dfrac{(2n)!}{\prod\limits_{k=1}^{n}2k}=\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$

Recherche de l'expression de la fonction somme d'une série entière du type $\sum \mathrm{P}(n)x^n$

Soit $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$ et la série entière $\sum\mathrm{P}(n)x^n$

Le rayon de convergence de cette série entière est égal 1 (cf critère d'équivalence puis règle de d'Alembert).
Le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X})$ peut se décomposer dans la base $\mathrm{B}=(1;\mathrm{X};\mathrm{X}(\mathrm{X}-1);\dots;\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\dots(\mathrm{X}-(k-1)))$ de $\mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$:

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{X})=a_0+a_1\mathrm{X}+a_2\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)+\dots+a_k\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\dots(\mathrm{X}-(k-1))}$$

Toutes les sommes manipulées étant convergentes pour $x\in]-1;1[$ on a, par linéarité :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(n)x^n=a_0\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)+a_1x\left(\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}\right)+\dots a_kx^k\left(\sum_{n=k}^{+\infty}n(n-1)\dots(n-(k-1))x^{n-k}\right)}$$

La fonction somme $\mathrm{S}:x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(n)x^n$ est définie sur $]-1;1[$ et s'exprime à l'aide des dérivées successives de la somme de la série géométrique. Soit $f:x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$

$$\boxed{\forall\in]-1;1[,\ \mathrm{S}(x)=a_0 f(x)+a_1 x f'(x)+\ldots+a_k x^k f^{(k)}(x)}$$

Exemple : pour $\sum_{n\geqslant 0} n^2 x^n$ ...

<u>Méthodes (non-exhaustives) permettant d'exprimer la somme d'une série entière à l'aide des fonctions de référence :</u>

1) Le terme général contient-il une factorielle ?
2) Des dérivées ou primitives du terme général sont-elles proches du terme général d'une série de référence ?
3) Pour les séries lacunaires penser à $\sum a_n x^{nq+r}=x^r\sum a_n\left(x^q\right)^n$
4) Pour rendre une série lacunaire : si $x\geqslant 0$ alors $x^n=\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{qn}$, si $x<0$ alors $x^n=(-1)^n(-x)^n=(-1)^n\left((-x)^{\frac{1}{q}}\right)^{qn}$
5) Pour séparer termes pairs et impairs : $\sum a_n x^n=\sum a_{2n}x^{2n}+\sum a_{2n+1}x^{2n+1}$
6) Pour n'utiliser que les termes pairs ou que les termes impairs : $\sum a_{2n}x^{2n}=\dfrac{1}{2}\left(\sum a_n x^n+\sum a_n(-x)^n\right)$
$$\sum a_{2n+1}x^{2n+1}=\frac{1}{2}\left(\sum a_n x^n-\sum a_n(-x)^n\right)$$
7) Éventuellement, ajouter ou soustraire les premiers termes pour retrouver une série de référence.

Théorème : développement en séries de Taylor

Soit f une fonction développable en série entière au voisinage de 0 alors f est de classe C^∞ au voisinage de 0 et son développement en série entière est unique et donné par : $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Démonstration : soit $]-a;a[$ tel que $\forall x\in]-a;a[,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ alors :

$$f(0)=a_0$$
$$f'(0)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\,a_n 0^{n-1}=a_1$$
$$\vdots$$
$$f^{(k)}(0)=\sum_{n=k}^{+\infty}n(n-1)\ldots(n-(k-1))a_n 0^{n-k}=k\times(k-1)\ldots 2\times 1\times a_k=k!\times a_k\quad\square$$

Exemple de code Python illustrant ce résultat au rang $n=5$ pour la fonction $x\mapsto\ln(1-x)$:

```python
from sympy import *
x=symbols('x')

print(diff(ln(1-x),x,5).subs(x,0))
print((diff(ln(1-x),x,5).subs(x,0))/factorial(5))
pprint(series(ln(1-x),x,0,6))
```

⚠ La réciproque est fausse : une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0 n'est pas nécessairement développable en série entière au voisinage de 0.

Exemple : la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases}f(0)=0\\ f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\ \text{si}\ x\neq 0\end{cases}$

Corollaire sur la parité

Soit f une fonction développable en série entière au voisinage de 0 en $\sum a_n x^n$:

si la fonction f est paire alors $\forall k\in\mathbb{N},\ a_{2k+1}=0$
si la fonction f est impaire alors $\forall k\in\mathbb{N},\ a_{2k}=0$

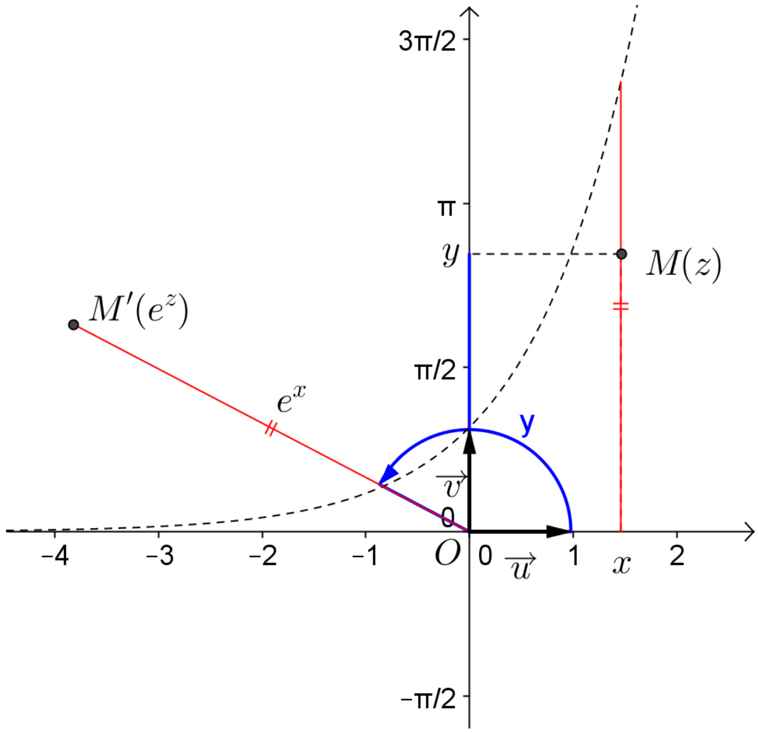
Démonstration : soit f une fonction définie et développable en série entière sur un intervalle $]-a;a[$.
Si f est paire alors $\forall x\in]-a;a[$, $f(-x)=f(x)$ or f est de classe C^{∞} sur $]-a;a[$ donc :
$\forall x\in]-a;a[$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $(-1)^k f^{(k)}(-x)=f^{(k)}(x)$ en particulier $-f^{(2k+1)}(-x)=f^{(2k+1)}(x)$ donc …

4. Exponentielle complexe

Définition de l'exponentielle complexe :

$$\boxed{\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2,\ e^{x+iy}\overset{\text{def}}{=}e^x(\cos(y)+i\sin(y))}$$

Remarque : $\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2$ on a : $e^{x+iy}=e^x\times e^{iy}$
Donc $e^{x+i0}=e^x$ et $e^{0+iy}=e^{iy}$



Propriétés de l'exponentielle complexe : soit $z\in\mathbb{C}$,

$\begin{cases}\mathrm{Re}(e^z)=\dots\\ \mathrm{Im}(e^z)=\dots\end{cases}$ donc $\overline{e^z}=\dots$

$\begin{cases}|e^z|=\dots\\ \arg(e^z)=\dots\end{cases}$

$e^{z+z'}=\dots$ donc $\dfrac{1}{e^z}=\dots$

Pour $k\in\mathbb{Z}$, $(e^z)^k=\dots$

⚠ Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, en général, $(e^z)^{\alpha}\neq e^{\alpha z}$.

Exemple : $(e^{i2\pi})^{\frac{1}{2}}=\dots$

$e^{i2\pi\frac{1}{2}}=\dots$

Dérivation de l'exponentielle d'une fonction à valeurs complexes

Soit I un intervalle réel, et $f:\mathrm{I}\to\mathbb{C}$.
Si f est dérivable sur I alors $g:t\mapsto e^{f(t)}$ est dérivable sur I et $\forall t\in\mathrm{I}$, $g'(t)=f'(t)e^{f(t)}$

Démonstration : soit $a(t)=\mathrm{Re}(f(t))$ et $b(t)=\mathrm{Im}(f(t))$ alors $(e^{a(t)})'=a'(t)e^{a(t)}$
et $(e^{ib(t)})'=(\cos(b(t))+i\sin(b(t)))'=-b'(t)\sin(b(t))+ib'(t)\cos(b(t))=ib'(t)(\cos(b(t))+i\sin(b'(t)))=ib'(t)e^{ib(t)}$
Donc $(e^{a(t)+ib(t)})'=(e^{a(t)}\times e^{ib(t)})'=a'(t)e^{a(t)}\times e^{ib(t)}+e^{a(t)}\times ib'(t)e^{ib(t)}=(a'(t)+ib'(t))e^{a(t)+ib(t)}$ □

Théorème : développement en série entière de l'exponentielle complexe

$$\boxed{\forall z\in\mathbb{C},\ e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n}$$

Démonstration : soit $y\in\mathbb{R}$, $\cos(y)+i\sin(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n}+i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}y^{2n+1}$

or $(iy)^{2n}=(i^2)^n y^{2n}=(-1)^n y^{2n}$ et $(iy)^{2n+1}=i(i^2)^n(y)^{2n+1}$

$\cos(y)+i\sin(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}(iy)^{2n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(iy)^{2n+1}$

Donc : $\cos(y)+i\sin(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(iy)^n$

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$, $e^x(\cos(y)+i\sin(y))=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(iy)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k\times\frac{1}{(n-k)!}(iy)^{n-k}\right)$

Donc $e^x(\cos(y)+i\sin(y))=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(iy)^{n-k}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(x+iy)^n$ □

Exemple : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\times\left(2+i\frac{\pi}{3}\right)^n=\dots$