# Probabilités sur un univers dénombrable



--------------

## 1. Espaces probabilisés dénombrables

### Définition de la dénombrabilité

Un ensemble est dit dénombrable s'il peut s'écrire en extension sous la forme $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ .

Exemples : L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est dénombrable car $\mathbb{N}=\{n | n\in\mathbb{N}\}$

L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ est dénombrable car $\mathbb{Z}=\left\{(-1)^n\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor | n\in\mathbb{N}\right\}$

L'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}=\left\{\frac{p}{10^q} | (p;q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\right\}$ est dénombrable.

L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q} | (p;q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\right\}$ est dénombrable.

En revanche l'intervalle [0;1] n'est pas dénombrable.

### Expérience aléatoire sur un univers dénombrable

Une expérience aléatoire sur un univers dénombrable est une expérience dont :

on connaît les issues possibles : l'ensemble des issues, appelé univers et noté $\Omega$ est dénombrable.

on ne sait pas, avant la réalisation de l'expérience, laquelle des issues sera obtenue.

Exemple : l'expérience consistant à construire un « mot » à partir des lettres 'A 'et 'B' se terminant par '.'.
L'univers est constitué des « mots » $OM=acc('.';'A.';'B.';'AA.';'AB.';BA.';BB.';'AAA.';'AAB.';'ABA.';...)
L'univers $\Omega$ est donc de cardinal infini car la longueur du mot obtenu peut être arbitrairement grande. Cependant $\Omega$ est dénombrable car il est possible de trier les mots selon leur longueur (les mots de $n$ lettres étant placés du rang $2^{n+1}$ au rang $2^{n+2}-1$ ) puis selon l'ordre alphabétique.
Exemple de code Python permettant d'obtenir les mots constitués de 5 lettres ou moins.

```python
L=['.']
for k in range(5):
    LA=['A'+mot for mot in L[2**k-1:]]
    LB=['B'+mot for mot in L[2**k-1:]]
    L=L+LA+LB
print(L)
```

['.', 'A.', 'B.', 'AA.', 'AB.', 'BA.', 'BB.', 'AAA.', 'AAB.', 'ABA.', 'ABB.', 'BAA.', 'BAB.', 'BBA.', 'BBB.', 'AAAA.', 'AAAB.', 'AABA.', 'AABB.', 'ABAA.', 'ABAB.', 'ABBA.', 'ABBB.', 'BAAA.', 'BAAB.', 'BABA.', 'BABB.', 'BBAA.', 'BBAB.', 'BBBA.', 'BBBB.', 'AAAAA.', 'AAAAB.', 'AAABA.', 'AAABB.', 'AABAA.', 'AABAB.', 'AABBA.', 'AABBB.', 'ABAAA.', 'ABAAB.', 'ABABA.', 'ABABB.', 'ABBAA.', 'ABBAB.', 'ABBBA.', 'ABBBB.', 'BAAAA.', 'BAAAB.', 'BAABA.', 'BAABB.', 'BABAA.', 'BABAB.', 'BABBA.', 'BABBB.', 'BBAAA.', 'BBAAB.', 'BBABA.', 'BBABB.', 'BBBAA.', 'BBBAB.', 'BBBBA.', 'BBBBB.']

### Définition d'un événement

Soit $\Omega$ un univers dénombrable.
Toute partie de $\Omega$ est un événement. Ainsi tout événement est dénombrable mais peut être de cardinal fini ou non.
On note $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements de $\Omega$ .

Exemple : Pour l'expérience précédente, « obtenir un mot de 4 lettres » est un événement de cardinal …
« obtenir un mot ayant exactement quatre A » est un événement de cardinal …

⚠ Si $\Omega$ est infini et dénombrable, alors $\mathscr{P}(\Omega)$ est infini mais non-dénombrable.
Dans la suite de ce cours, l'univers $\Omega$ est considéré fini ou, infini et dénombrable.

**Union et intersection d'une infinité d'événements**

Soit $\Omega$ un univers dénombrable et $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{P}(\Omega)$ .
La réunion des événements $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est constituée des issues appartenant au moins à l'un des événements $\mathrm{A}_i$ :

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_i=\{\omega\in\Omega \mid \exists\, i\in\mathbb{N}, \omega\in\mathrm{A}_i\}=\{\omega\in\Omega \mid \omega\in\mathrm{A}_0 \text{ ou } \omega\in\mathrm{A}_1 \text{ ou } \dots\}$$

L'intersection des événements $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est constituée des issues appartenant à tous les événements $\mathrm{A}_i$ :

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_i=\{\omega\in\Omega \mid \exists\, i\in\mathbb{N}, \omega\in\mathrm{A}_i\}=\{\omega\in\Omega \mid \omega\in\mathrm{A}_0 \,\text{et}\, \omega\in\mathrm{A}_1 \,\text{et}\dots\}$$

Remarques : $\overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_i}=\dots$ $\qquad$ $\overline{\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_i}=\dots$

Exemples : Soit, pour $i\in\mathbb{N}$ , l'événement $\mathrm{L}_i$ : « obtenir un mot de $i$ lettres »
$\mathrm{L}_0=\dots$ $\quad$ $\mathrm{L}_1=\dots$ $\quad$ $\mathrm{L}_2=\dots$ $\quad$ $\mathrm{L}_3=\dots$ $\quad$ $\mathrm{L}_4=\dots$
Alors $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{L}_i$ ... $\qquad$ $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{L}_i=$...
Soit, pour $i\in\mathbb{N}$ , l'événement $\mathrm{A}_i$ : « obtenir un mot contenant exactement $i$ fois la lettre 'A' »
$\mathrm{A}_0=\dots$ $\quad$ $\mathrm{A}_1=\dots$ $\quad$ $\mathrm{A}_2=\dots$ $\quad$ $\mathrm{A}_3=\dots$ $\quad$ $\mathrm{A}_4=\dots$
Alors $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_i$... $\qquad$ $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_i=$...

**Définition d'un système complet d'événements**

Soit $\Omega$ un univers dénombrable, I un ensemble fini ou $\mathrm{I}=\mathbb{N}$ et $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une suite (finie ou dénombrable) de $\mathscr{P}(\Omega)$ .

$(\mathrm{A}_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements si et seulement si
il est constitué d'événements deux à deux incompatibles dont et la réunion est $\Omega$ .

$$\text{i.e.} \begin{cases} \forall(i\,;j)\in\mathrm{I}^2,\ i\neq j\Rightarrow \mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j=\varnothing \\ \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i=\Omega \end{cases}$$

Remarques : il est évident que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_i\subset\Omega$ . Ainsi $\Omega\subset\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_i$ suffit à prouver que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_i=\Omega$ .

Si $\Omega$ est fini alors tout système complet d'événements est fini.
Si $\Omega$ est infini et dénombrable alors un système complet d'événements peut être fini ou infini dénombrable.
Si $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une suite d'événements deux à deux disjoints alors en lui ajoutant l'événement $\overline{\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i}$ on obtient un système complet d'événements.

Exemple : Soit, pour $i\in\mathbb{N}$ , l'événement $\mathrm{A}_i$ : « obtenir un mot de $i$ lettres »...

**Définition d'une probabilité sur un univers dénombrable**

Soit $\Omega$ un univers dénombrable.

P est une probabilité sur $\Omega$ si et seulement si

$$\begin{cases} \mathrm{P}:\mathscr{P}(\Omega)\to[0;1] \\ \mathrm{P}(\Omega)=1 \\ \forall(\mathrm{A}_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ suite de } \mathscr{P}(\Omega) \text{ telle que } \left(\forall(i\,;j)\in\mathbb{N}^2, i\neq j\Rightarrow \mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j=\varnothing\right), \mathrm{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_k\right)=\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_k) \end{cases}$$

Une probabilité P sur un univers infini dénombrable $\Omega=\{\omega_i \mid i\in\mathbb{N}\}$ est entièrement déterminée par la donnée de $(\mathrm{P}(\omega_i))_{i\in\mathbb{N}}$ suite de $[0;1]$ (probabilité de chaque issue) telles que $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\omega_i)=1$ .

⚠ Si les événements A, B et C ne sont pas deux à deux disjoints alors $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\mathrm{C})\neq\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{C})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C})$
⚠ Une probabilité sur un univers infini et dénombrable ne peut pas être uniforme.
Exemple : en choisissant les lettres successivement avec des probabilités constantes, la lettre 'A' avec une probabilité 0,1 , la lettre 'B' avec une probabilité 0,2 et le caractère '.' avec une probabilité 0,7.
Exemple de simulation de 1000 expériences aléatoires suivant ce protocole.

```python
import numpy as np

def experience():
    mot=np.random.choice(['A','B','.'],1,p=[0.1,0.2,0.7])[0]
    while mot[-1]!='.':
        mot=mot+np.random.choice(['A','B','.'],1,p=[0.1,0.2,0.7])[0]
    return mot

L=[experience() for k in range(1000)]
freq=[[issue,L.count(issue)/len(L)] for issue in set(L)]
print(freq)
```

[['BBBBA.', 0.001], ['BBAA.', 0.001], ['AAAB.', 0.001], ['AB.', 0.017], ['A.', 0.063], ['BAB.', 0.003], ['AA.', 0.005], ['BAABAAB.', 0.001], ['B.', 0.124], ['BBAAB.', 0.001], ['AAB.', 0.002], ['BAA.', 0.003], ['.', 0.723], ['BABB.', 0.001], ['BA.', 0.011], ['AAAA.', 0.001], ['BB.', 0.029], ['BBBABB.', 0.001], ['ABBB.', 0.001], ['BBB.', 0.006], ['BBAB.', 0.001], ['BBA.', 0.004]]

On peut alors calculer les probabilités de certains événements :

P('A.')=... P('B.')=... P('AA.')=... P('AB.)=...
P('BA.')=... P('BB.')=... P('BAAABB.')=...

Remarque : l'univers associé à cette expérience aléatoire contient des « mots » de longueur infinie (et n'est pas dénombrable!) car ne jamais obtenir le caractère '.' est possible. Cependant l'événement « ne jamais obtenir de point » est de probabilité nulle car $\lim_{n\to+\infty}(1-0,7)^n=0$ , cet événement est dit négligeable, l'événement contraire est dit presque sûr.

**Propriétés des probabilités sur un univers dénombrable**

Soient $\Omega$ un univers dénombrable, P une probabilité sur $\Omega$ , et deux événements $A\subset\Omega$ et $B\subset\Omega$ .

- ▶ Si $P(A)=0$ alors A est dit négligeable
- ▶ Si $P(A)=1$ alors A est dit presque sûr
- ▶ Probabilité de l'événement contraire : $P(\overline{A})=1-P(A)$
- ▶ Probabilité de l'événement impossible : $P(\emptyset)=0$
- ▶ Probabilité de A privé de B : $P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)$
- ▶ Croissance de la probabilité : $A\subset B\Rightarrow P(A)\leqslant P(B)$
- ▶ Probabilité de la réunion : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Démonstration :

$$\begin{cases}\Omega=A\cup\overline{A}\\ A\cap\overline{A}=\emptyset\end{cases}\Rightarrow \dots$$

$$\overline{\Omega}=\emptyset\Rightarrow\dots$$

$$\begin{cases}A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)\\ (A\setminus B)\cap(A\cap B)=\emptyset\end{cases}\Rightarrow \dots$$

Si $A\subset B$ alors $B=A\cup(B\setminus A)$ donc...

$$\begin{cases}A\cup B=(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B\setminus A)\\ (A\setminus B)\cap(A\cap B)=\emptyset\\ (B\setminus A)\cap(A\cap B)=\emptyset\\ (A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\emptyset\end{cases}\Rightarrow \dots$$

## 2. Indépendance et conditionnement

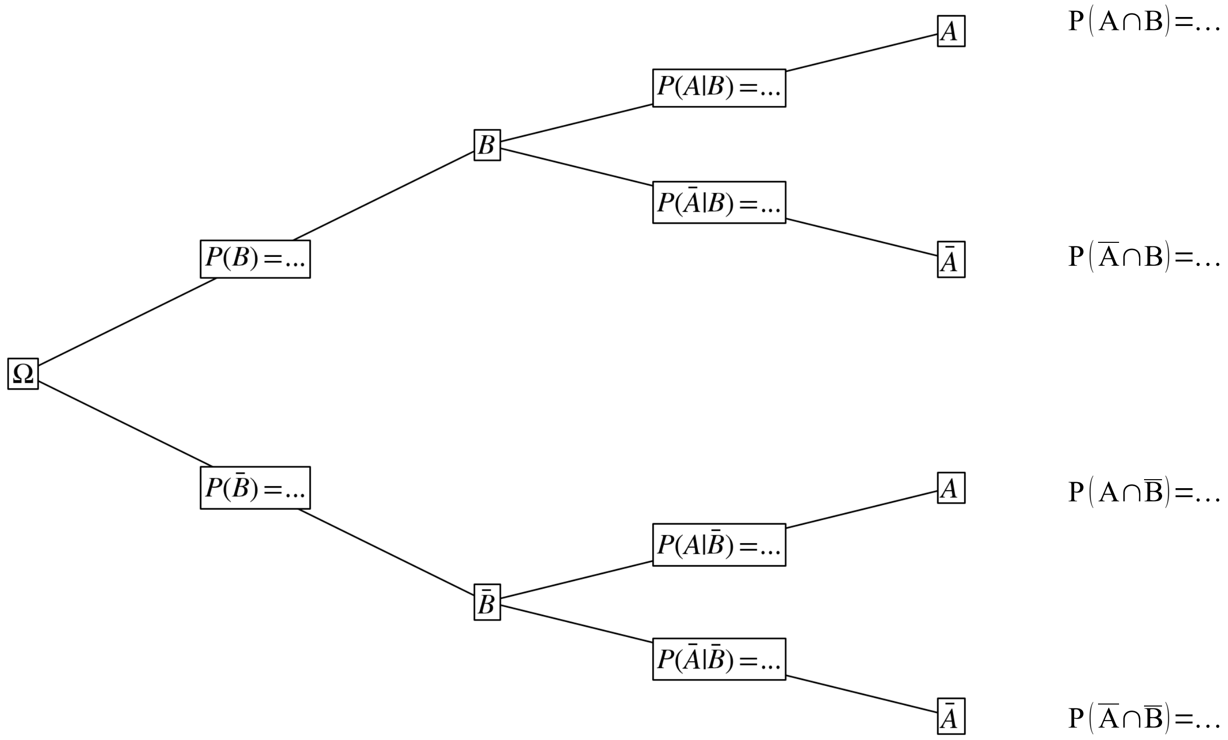
**Définition des probabilités conditionnelles**

Soient A et B deux événements tels que $P(B)\neq0$ .

La probabilité conditionnelle de A sachant B est $\boxed{P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}}$

L'application $\begin{array}{rccc}P_B: & \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0;1]\\ & A & \mapsto & \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\end{array}$ est une probabilité sur $\Omega$ appelée probabilité conditionnelle sachant B.

Exemple : Soit B : « obtenir un mot de quatre lettres » et A : « obtenir un mot contenant exactement trois 'A' »




Exemple de simulation :

```python
import numpy as np

def experience():
    mot=np.random.choice(['A','B','.'],1,p=[0.1,0.2,0.7])[0]
    while mot[-1]!='.':
        mot=mot+np.random.choice(['A','B','.'],1,p=[0.1,0.2,0.7])[0]
    return mot

def frequences_conditionnelles(A,B,n):
    nb_B=0
    nb_A_et_B=0
    nb_A_et_nonB=0
    for k in range(n):
        expe=experience()
        if B(expe):
            nb_B=nb_B+1
            if A(expe):
                nb_A_et_B=nb_A_et_B+1
        else:
            if A(expe):
                nb_A_et_nonB=nb_A_et_nonB+1
    return(nb_A_et_B/nb_B,1-nb_A_et_B/nb_B,nb_A_et_nonB/(n-nb_B),1-nb_A_et_nonB/(n-nb_B))

def trois_A(mot):
    return sum(int(car=='A') for car in mot)==3

def quatre_lettres(mot):
    return len(mot)-1==4

print(frequences_conditionnelles(trois_A,quatre_lettres,1000000))
```

(0.09964093357271095, 0.900359066427289, 0.0011735365988556259, 0.9988264634011443)

## Formule des probabilités composées

Soient $n$ événements $A_1, \ldots, A_n$ tels que $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$.

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2 | A_1) \times P(A_3 | (A_1 \cap A_2)) \times \ldots \times P(A_n | (A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}))$$

$$\text{i.e. } P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(A_k \middle| \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right)\right)$$

Remarque : dans un arbre probabiliste, cette propriété s'énonce : « la probabilité d'une feuille est égale au produit des probabilités des branches menant à cette feuille».

Démonstration : soit $n$ événements $A_1, \ldots, A_n$ tels que $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$

soit, pour $k \in [\![2;n]\!]$, HR($k$) : « $P(A_1 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1) \times P(A_2 | A_1) \times P(A_3 | (A_1 \cap A_2)) \times \ldots \times P(A_k | (A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1}))$ »

<u>Initialisation</u> : $(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \subset A_1$ donc $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \leqslant P(A_1)$ ainsi $P(A_1) \neq 0$ donc $P(A_2 | A_1) = \dfrac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}$

D'où $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2 | A_1)$. Ainsi $\mathrm{HR}(2)$ est vérifiée.

<u>Hérédité</u> : soit $k \in [\![2;n-1]\!]$. Supposons $\mathrm{HR}(k)$ vérifiée.

$(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \subset (A_1 \cap \ldots \cap A_k)$ donc $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \leqslant P(A_1 \cap \ldots \cap A_k)$ donc $P(A_1 \cap \ldots \cap A_k) \neq 0$.

Donc $P(A_{k+1} | (A_1 \cap \ldots \cap A_k)) = \dfrac{P(A_1 \cap \ldots \cap A_{k+1})}{P(A_1 \cap \ldots \cap A_k)}$

Ainsi $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{k+1}) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_k) \times P(A_{k+1} | (A_1 \cap \ldots \cap A_k))$

D'après $\mathrm{HR}(k)$, on a donc

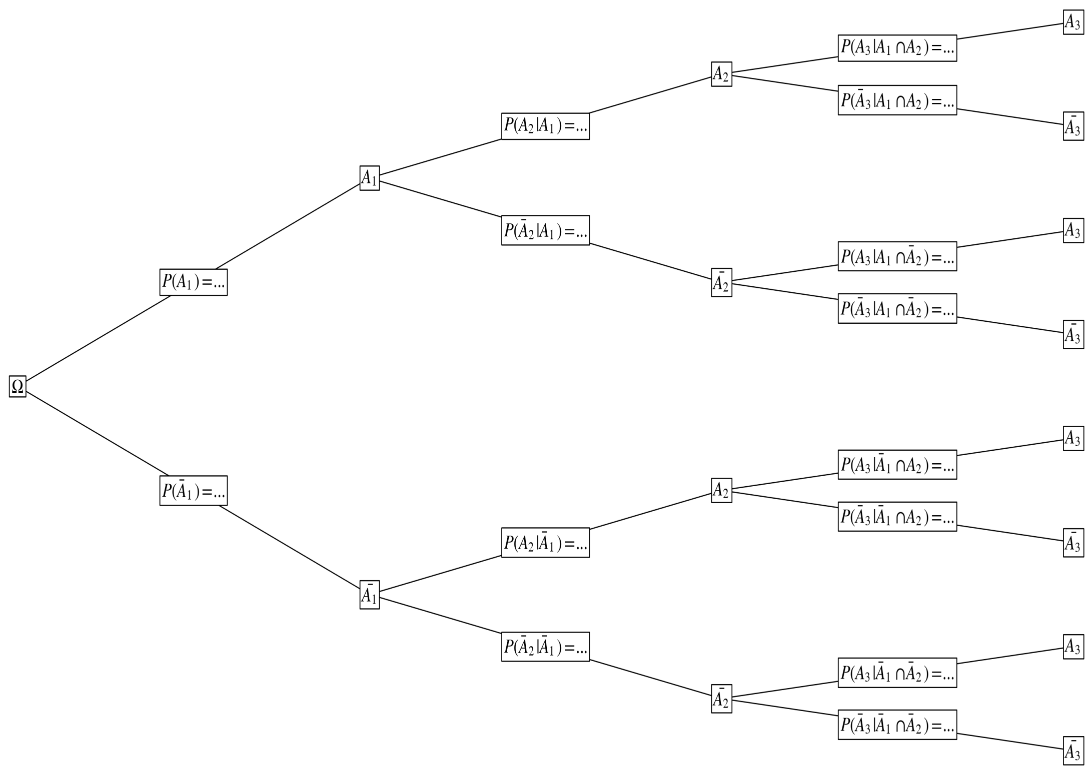
$P(A_1 \cap \ldots \cap A_{k+1}) = P(A_1) \times P(A_2 | A_1) \times P(A_3 | (A_1 \cap A_2)) \times \ldots \times P(A_k | (A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1})) \times P(A_{k+1} | (A_1 \cap \ldots \cap A_k))$

Donc $\mathrm{HR}(k+1)$ est vérifiée. □

Exemple : Soit $A_1$ l'événement « obtenir un mot de cinq lettres »

$A_2$ l'événement « obtenir au moins un A »

$A_3$ l'événement « obtenir au moins un B »




$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \ldots$

$P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) = \ldots$

$P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) = \ldots$

$P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = \ldots$

$P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) = \ldots$

$P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) = \ldots$

$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) = \ldots$

$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = \ldots$

**Formule des probabilités totales**

Soient $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements et B un événement quelconque.

La série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(B\cap A_n)$ est convergente et sa somme est égale à $P(B)$.

i.e. $P(B)=\sum_{k=0}^{+\infty} P(B\cap A_k)$

Si de plus chaque événement $A_k$ a une probabilité non nulle alors $P(B)=\sum_{k=0}^{+\infty}(P(A_k)\times P(B|A_k))$

Démonstration : Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles et B un événement quelconque : $B=B\cap\Omega=B\cap\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(B\cap A_k)$

et pour $(i;j)\in\mathbb{N}^2$ tel que $i\neq j$, $(B\cap A_i)\cap(B\cap A_j)\subset A_i\cap A_j=\emptyset$

Donc, puisque P est une probabilité sur $\Omega$, $P(B)=\sum_{k=0}^{+\infty} P(B\cap A_k)$. □

Exemple : Soit $L_i$ : « obtenir un mot de $i$ lettres » et A : « obtenir exactement trois 'A' ».
$(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements et $\forall i\in\mathbb{N}$, $P(L_i)=0,3^i\times 0,7$

D'après la formule des probabilités totales : $P(A)=\sum_{i=0}^{+\infty} P(L_i)\times P_{L_i}(A)$ or pour $i<3$, $P_{L_i}(A)=\ldots$

pour $i\geqslant 3$, $P_{L_i}(A)=\ldots$

...

$P(A)=\frac{7}{4^6}$

Exemple de simulation Python :

```python
import numpy as np

def experience():
    mot=np.random.choice(['A','B','.'],1,p=[0.1,0.2,0.7])[0]
    while mot[-1]!='.':
        mot=mot+np.random.choice(['A','B','.'],1,p=[0.1,0.2,0.7])[0]
    return mot

def frequences_evenement(A,n):
    nbre_de_A=0
    for k in range(n):
        expe=experience()
        if A(expe):
            nbre_de_A=nbre_de_A+1
    return(nbre_de_A/n)

def trois_A(mot):
    return sum(int(car=='A') for car in mot)==3

print(frequences_evenement(trois_A,1000000))
```

0.001754

**Extension de la formule des probabilités totales**

Soient $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles telle que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k)=1$ et B un événement quelconque.

La série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(B\cap A_n)$ est convergente et sa somme est égale à $P(B)$.

i.e. $P(B)=\sum_{k=0}^{+\infty} P(B\cap A_k)$

Démonstration : $\forall\ k\in\mathbb{N}$, $(B\cap A_k)\subset A_k$ donc $P(B\cap A_k)\leqslant P(A_k)$

D'après le critère de majoration pour les séries à termes positifs, puisque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$ est convergente, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(B\cap A_n)$ est convergente.

Soit $C=\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k}$ alors C et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forment un système complet d'événements de $\Omega$

Donc d'après la formule des probabilités totales précédente : $P(B)=P(B\cap C)+\sum_{k=0}^{+\infty} P(B\cap A_k)$

De plus P étant une probabilité : $P(\Omega)=P(C)+\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k)$

Ainsi, si $\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k)=1$ alors $P(C)=0$.

Or $(B\cap C)\subset C$ donc $P(B\cap C)\leqslant P(C)$ d'où $P(B\cap C)=0$.

On a alors, $P(B)=\sum_{k=0}^{+\infty} P(B\cap A_k)$. □

**Formule de Bayes**

Soient deux événements A et B.

$$\text{Si } P(A)\neq 0 \text{ et } P(B)\neq 0 \text{ alors, } P(A|B)=\frac{P(B|A)\times P(A)}{P(B)}$$

Remarque : si $P(A\cap B)\neq 0$ alors $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$ et $(P(A|B)=P(B|A)\Leftrightarrow P(A)=P(B))$.

Démonstration : si $P(B)\neq 0$ alors $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Si $P(A)\neq 0$ alors $P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)$

Donc … □

Exemple : Soit B : « obtenir un mot de quatre lettres » et A : « obtenir un mot contenant exactement trois 'A' »

**Définition de l'indépendance de deux événements**

Soient deux événements A et B.

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

⚠ Ne pas confondre indépendants et incompatibles.
Deux événements sont indépendants et incompatibles si et seulement si...

⚠ La relation d'indépendance n'est pas transitive : A et B indépendants et B et C indépendants n'implique pas que A et C sont indépendants. Exemple, on choisit au hasard un nombre dans $[\![1;24]\!]$ selon une probabilité uniforme.

On envisage les événements suivants : A : « le résultat est un multiple de 2 »
B : « le résultat est un multiple de 3 »
C : « le résultat est un multiple de 4 »

P(A)=... $P(A\cap B)=\ldots$

P(B)=... $P(A\cap C)=\ldots$

P(C)=... $P(B\cap C)=\ldots$

**Caractérisation de l'indépendance utilisant le conditionnement**

Soient deux événements A et B.

$$\text{A et B sont indépendants si et seulement si } \begin{cases} P(B)=0 \text{ et } P(A\cap B)=0 \\ \text{ou} \\ P(B)\neq 0 \text{ et } P(A|B)=P(A) \end{cases}$$

Démonstration : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \Leftrightarrow \begin{cases} P(B)=0 \text{ et } P(A\cap B)=0 \\ \text{ou} \\ P(B)\neq 0 \text{ et } P(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \end{cases}$ □

**Définition de l'indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements**

Soient $n$ événements $A_1, \dots, A_n$.

Les événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants si et seulement si

$$\text{pour toute partie } J \subset [\![1;n]\!],\ P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P(A_j)$$

Remarques : le nombre de parties de l'ensemble $[\![1;n]\!]$ est $2^n$.

Si les événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants alors en considérant toutes les $\binom{n}{2}$ parties de $[\![1;n]\!]$ à deux éléments, on a l'indépendance des événements $A_1, \dots, A_n$ deux à deux.

⚠ Si $n \geqslant 3$ alors l'indépendance des événements $A_i$ deux à deux n'entraîne pas nécessairement leur indépendance mutuelle. Exemple : On choisit au hasard un nombre dans $[\![1;24]\!]$ selon une probabilité uniforme.

On envisage les événements suivants : A : « le résultat est un multiple de 2 »
B : « le résultat est un multiple de 3 »
C : « le résultat est 1 ou 2 ou 5 ou 6 ou 7 ou 12 »

P(A)=... $P(A\cap B)=\dots$

P(B)=... $P(A\cap C)=\dots$

P(C)=... $P(B\cap C)=\dots$

$P(A\cap B\cap C)=\dots$

Exemple codes Python permettant de lister les parties à deux éléments et les parties d'un ensemble :

```python
def parties_2_elements(L):
    LP=[]
    for i in range(len(L)-1):
        for j in range(i+1,len(L)):
            LP.append([L[i],L[j]])
    return LP

def parties(L):
    LP=[[]]
    for x in L:
        LP=LP+[p+[x] for p in LP]
    return LP

print(parties_2_elements([1,2,3,4]))
print(parties([1,2,3,4]))
```

[[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [2, 4], [3, 4]]

[[], [1], [2], [1, 2], [3], [1, 3], [2, 3], [1, 2, 3], [4], [1, 4], [2, 4], [1, 2, 4], [3, 4], [1, 3, 4], [2, 3, 4], [1, 2, 3, 4]]
t