

Opérations sur les relations de comparaison locales.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, et I un intervalle non réduit à un point tel que: $a \in I$ ou $a = \sup I$ ou $a = \inf I$.

On considère 3 fonctions f , g et φ définies sur l'intervalle I et telles que $\forall x \in I, f(x) = \varphi(x) \times g(x)$, ainsi : $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } g(x) \neq 0 \text{ alors } \varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \\ \text{si } g(x) = 0 \text{ alors } f(x) = 0 \end{array} \right.$

Dans la pratique, si $g(x)$ ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$ alors la fonction φ est définie sur $I \setminus \{a\}$ par f et g et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ peut être envisagée sereinement.

	Domination au voisinage de a	Équivalence au voisinage de a	Négligeable au voisinage de a
Définitions	$f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow \varphi$ est bornée au voisinage de a $f(x)$ est dominé par $g(x)$ au voisinage de a $\exists M > 0, \exists J$ voisinage de $a : \forall x \in J, \varphi(x) \leq M$ donc $\forall x \in J, f(x) \leq M g(x) $	$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1$ $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ au voisinage de a $\forall \varepsilon > 0, \exists J$ voisinage de $a : \forall x \in J, \varphi(x) - 1 \leq \varepsilon$ donc $\forall x \in J; f(x) - g(x) \leq \varepsilon g(x) $	$f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ $f(x)$ est négligeable face à $g(x)$ au voisinage de a $\forall \varepsilon > 0, \exists J$ voisinage de $a : \forall x \in J, \varphi(x) \leq \varepsilon$, donc $\forall x \in J; f(x) \leq \varepsilon g(x) $
Conséquences sur les limites	$\left. \begin{array}{l} f(x) = O(g(x)) \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$	$\left. \begin{array}{l} f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ existe (finie ou non)} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ $\exists l \in \mathbb{K}^*$ tel que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \Rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$	$\left. \begin{array}{l} f(x) = o(g(x)) \\ g \text{ est bornée au voisinage de } a \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$
Liens	$f(x) = o(g(x)) \Rightarrow f(x) = O(g(x))$	$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x))$	$\left. \begin{array}{l} f_1(x) = o(g_1(x)) \\ f_2(x) = O(g_2(x)) \end{array} \right\} \Rightarrow f_1(x) \times f_2(x) = o(g_1(x) \times g_2(x))$
Transitivité	$\left. \begin{array}{l} f(x) = O(g(x)) \\ g(x) = O(h(x)) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = O(h(x))$	$\left. \begin{array}{l} f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$	$\left. \begin{array}{l} f(x) = o(g(x)) \\ g(x) = o(h(x)) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = o(h(x))$
Combinaisons linéaires	$f(x) = O(g(x)) \Rightarrow \lambda f(x) = O(g(x))$ $\left. \begin{array}{l} f_1(x) = O(g(x)) \\ f_2(x) = O(g(x)) \end{array} \right\} \Rightarrow f_1(x) + f_2(x) = O(g(x))$	$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \Rightarrow \lambda f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \lambda g(x)$ \triangle $\left. \begin{array}{l} f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x) \\ f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_2(x) \end{array} \right\}$ n'impl. pas $f_1(x) + f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x) + g_2(x)$	$f(x) = o(g(x)) \Rightarrow \lambda f(x) = o(g(x))$ $\left. \begin{array}{l} f_1(x) = o(g(x)) \\ f_2(x) = o(g(x)) \end{array} \right\} \Rightarrow f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$
Produits membre à membre	$f(x) = O(g(x)) \Rightarrow h(x) \times f(x) = O(h(x) \times g(x))$ $\left. \begin{array}{l} f_1(x) = O(g_1(x)) \\ f_2(x) = O(g_2(x)) \end{array} \right\} \Rightarrow f_1(x) \times f_2(x) = O(g_1(x) \times g_2(x))$	$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \Rightarrow h(x) \times f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x) \times g(x)$ $\left. \begin{array}{l} f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x) \\ f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_2(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f_1(x) \times f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x) \times g_2(x)$	$f(x) = o(g(x)) \Rightarrow h(x) \times f(x) = o(h(x) \times g(x))$ $\left. \begin{array}{l} f_1(x) = o(g_1(x)) \\ f_2(x) = o(g_2(x)) \end{array} \right\} \Rightarrow f_1(x) \times f_2(x) = o(g_1(x) \times g_2(x))$
Puissances	Si $(f(x))^\alpha$ et $(g(x))^\alpha$ existent pour $x \in I \setminus \{a\}$ alors : $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+, f(x) = O(g(x)) \Rightarrow (f(x))^\alpha = O((g(x))^\alpha)$	Si $(f(x))^\alpha$ et $(g(x))^\alpha$ existent pour $x \in I \setminus \{a\}$ alors : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \Rightarrow (f(x))^\alpha \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g(x))^\alpha$	Si $(f(x))^\alpha$ et $(g(x))^\alpha$ existent pour $x \in I \setminus \{a\}$ alors : $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+, f(x) = o(g(x)) \Rightarrow (f(x))^\alpha = o((g(x))^\alpha)$
Composition à droite	Si $f(h(x))$ et $g(h(x))$ existent pour $x \in I \setminus \{a\}$ $\left. \begin{array}{l} f(x) = O(g(x)) \\ \lim_{x \rightarrow b} h(x) = a \end{array} \right\} \Rightarrow f(h(x)) = O(g(h(x)))$	Si $f(h(x))$ et $g(h(x))$ existent pour $x \in I \setminus \{a\}$ $\left. \begin{array}{l} f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow b} h(x) = a \end{array} \right\} \Rightarrow f(h(x)) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(h(x))$	Si $f(h(x))$ et $g(h(x))$ existent pour $x \in I \setminus \{a\}$ $\left. \begin{array}{l} f(x) = o(g(x)) \\ \lim_{x \rightarrow b} h(x) = a \end{array} \right\} \Rightarrow f(h(x)) = o(g(h(x)))$
\triangle	$f(x) = O(g(x))$ n'implique pas $h(f(x)) = O(h(g(x)))$	$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ n'implique pas $h(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(g(x))$	$f(x) = o(g(x))$ n'implique pas $h(f(x)) = o(h(g(x)))$