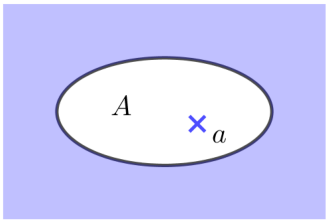
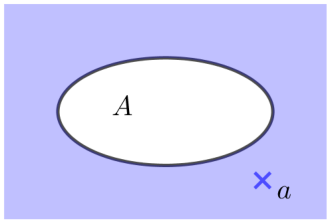
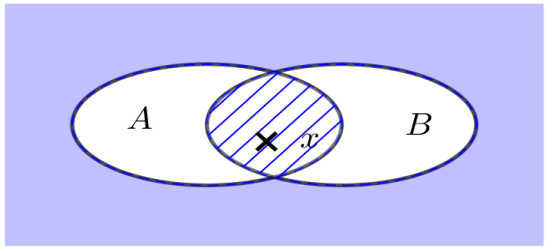
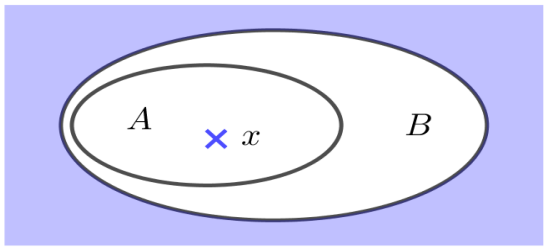
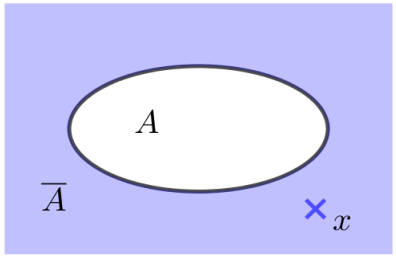
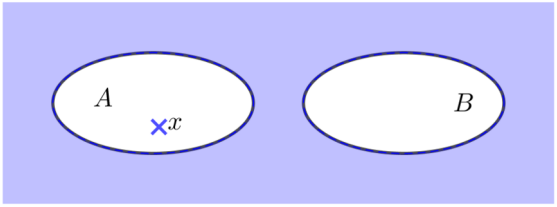
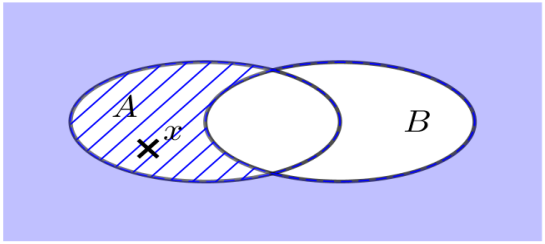
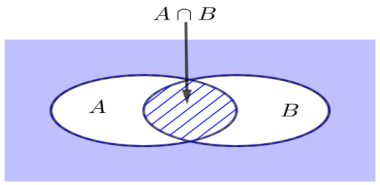
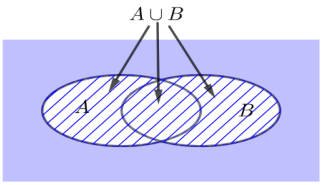
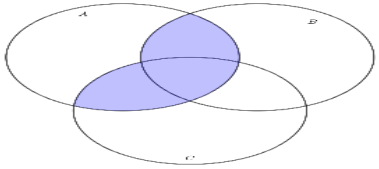
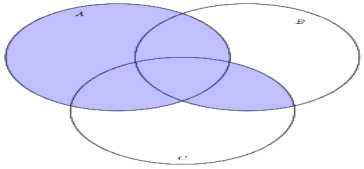
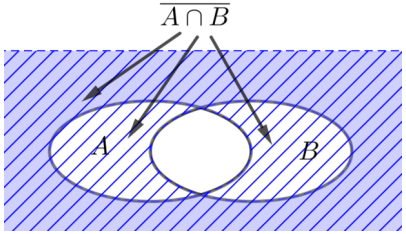
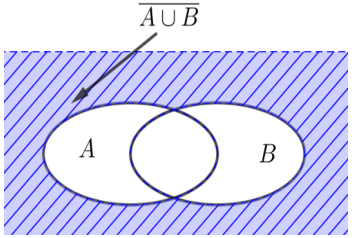
Logique mathématique

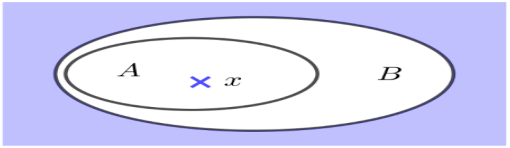
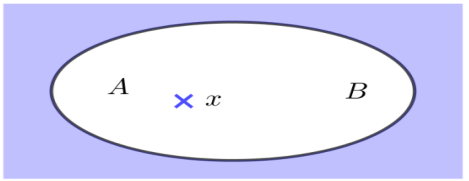
	Proposition logique (assertion)	Proposition existentielle	Proposition universelle
Énoncés	Une proposition logique est un énoncé vrai ou faux sans ambiguïté. Exemples : Vraie : « 10 est pair » Fausse : « $\sqrt{5}<2$ »	Il existe : $\exists$ Il existe un unique : $\exists!$ Exemples : « $\exists x\in\mathbb{R}$ tel que $x^2=9$ » est vraie. « $\exists x\in\mathbb{R}$ tel que $x^2=-1$ » est fausse	Pour tout, quel que soit : $\forall$ Exemples : « $\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2\geqslant 0$ est vraie. « $\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2\geqslant x$ » est fausse.
Comment valider ?	Utiliser une définition, une propriété, un théorème. Raisonnement déductif. Exemple : $10=2\times 5$ donc 10 est pair	Donner un exemple Invoquer un théorème d'existence (et d'unicité). Résoudre une équation ou une inéquation.	Pour un élément quelconque, valider la proposition. Étudier une fonction. Raisonner par récurrence.
Comment invalider ?	Raisonnement par l'absurde Exemple : si « $\sqrt{5}<2$ » est vraie alors, la fonction carré étant croissante sur $[0;+\infty[$, on a $5<4$ ce qui est absurde. Conclusion : « $\sqrt{5}<2$ » est faux.	Démontrer qu'une équation (ou un système d'équations) est incompatible. Raisonnement par l'absurde.	Donner un contre exemple. Exemple : $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$ donc « $\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2\geqslant x$ » est fausse.
Point de vue ensembliste	« $a\in A$ » est vraie  « $a\in A$ » est fausse 	« $\exists x\in A$ » i.e. « $A\neq\emptyset$ » « $\exists x\in A$ tel que $x\in B$ » i.e. « $A\cap B\neq\emptyset$ » 	« $\forall x\in A, x\in B$ » i.e. « $A\subset B$ » 
Négation / ensemble complémentaire	La négation de la proposition P, notée non(P), est l'énoncé contraire de celui de P. Ainsi lorsque P est vraie, non(P) est fausse et lorsque P est fausse, non(P) est vraie. Exemples :non(« 10 est pair ») i.e. « 10 n'est pas pair » non(« $\sqrt{5}<2$ ») i.e. « $\sqrt{5}\geqslant 2$ » Complémentaire d'un ensemble : « $non(x\in A)$ » i.e. « $(x\notin A)$ » i.e. « $x\in\overline{A}$ » 	La négation d'une proposition existentielle est une proposition universelle. Exemple : la négation de «il existe un élément de A qui vérifie la condition C » est la proposition « quel que soit l'élément de A, il ne vérifie pas la condition C ». « $non(\exists x\in A$ tel que $x\in B)$ » i.e. « $\forall x\in A, x\notin B$ » i.e. « $A\cap B=\emptyset$ » 	La négation d'une proposition universelle est une proposition existentielle. Exemple : la négation de «tout élément de A vérifie la condition C » est la proposition « il existe un élément de A ne vérifiant pas la condition C ». « $non(\forall x\in A, x\in B)$ » i.e. « $\exists x\in A$ tel que $x\notin B$ » i.e. « $A\cap\overline{B}\neq\emptyset$ » 

Conjonction et disjonction (non exclusive)

Soient $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des propositions logiques, A, B, C et $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des ensembles.

<table>
<tr><th></th><th>Conjonction : « et »</th><th colspan="2"></th><th>Disjonction (non exclusive) : « ou »</th></tr>
<tr><td>Énoncés</td><td>« P_1 et P_2 » est vraie lorsque les deux propositions P_1 et P_2 sont vraies.
« P_1 et P_2 » est fausse lorsque l'une (au moins) des deux propositions P_1 ou P_2 est fausse.</td><td colspan="2"></td><td>« P_1 ou P_2 » est vraie lorsque l'une (au moins) des deux propositions P_1 ou P_2 est vraie.
« P_1 ou P_2 » est fausse lorsque les deux propositions P_1 et P_2 sont fausses.</td></tr>
<tr><td>Liens avec les quantificateurs</td><td>« P_1 et P_2 et … et P_n » est vraie lorsque $\forall i\in[\![1;n]\!]$, P_i est vraie.
« P_1 et P_2 et … et P_n » est fausse lorsque $\exists i\in[\![1;n]\!]$ tel que P_i est fausse.</td><td colspan="2"></td><td>« P_1 ou P_2 ou … ou P_n » est vraie lorsque $\exists i\in[\![1;n]\!]$ tel que P_i est vraie.
« P_1 ou P_2 ou … ou P_n » est fausse lorsque $\forall i\in[\![1;n]\!]$, P_i est fausse.</td></tr>
<tr><td>Comment valider ?</td><td>Valider <u>toutes</u> les propositions.</td><td colspan="2"></td><td>Valider <u>au moins l'une</u> des propositions.</td></tr>
<tr><td>Comment invalider ?</td><td>Invalider <u>au moins l'une</u> des propositions.
Démontrer qu'<u>au moins deux</u> propositions sont incompatibles.</td><td colspan="2"></td><td>Invalider <u>toutes</u> les propositions.</td></tr>
<tr><td>Point de vue ensembliste</td><td>« $x\in A$ et $x\in B$ » i.e. « $x\in A\cap B$ »
« $\forall i\in[\![1;n]\!]$, $x\in A_i$ » i.e. « $x\in\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ »
  </td><td colspan="2"></td><td>« $x\in A$ ou $x\in B$ » i.e. « $x\in A\cup B$ »
« $\exists i\in[\![1;n]\!]$ tel que $x\in A_i$ » i.e. « $x\in\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ »
  </td></tr>
<tr><td rowspan="3">Règles opératoires</td><td>« P_1 et P_2 » i.e. « P_2 et P_1 » autrement dit $A\cap B=B\cap A$</td><td>Commutativité</td><td>« P_1 ou P_2 » i.e. « P_2 ou P_1 » autrement dit $A\cup B=B\cup A$</td></tr>
<tr><td>« P_1 et (P_2 et P_3) » i.e. « (P_1 et P_2) et P_3 »
autrement dit $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C\overset{\text{def}}{=}A\cap B\cap C$</td><td>Associativité</td><td>« P_1 ou (P_2 ou P_3) » i.e. « (P_1 ou P_2) ou P_3 »
autrement dit $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C\overset{\text{def}}{=}A\cup B\cup C$</td></tr>
<tr><td>« P_1 et (P_2 ou P_3) » i.e. « (P_1 et P_2) ou (P_1 et P_3) »
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
$B\cap\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(B\cap A_i)$
  </td><td>Distributivité</td><td>« P_1 ou (P_2 et P_3) » i.e. « (P_1 ou P_2) et (P_1 ou P_3) »
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
$B\cup\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(B\cup A_i)$
  </td></tr>
<tr><td>Négation/ ensemble complé-mentaire</td><td>La négation d'une conjonction est une disjonction (non exclusive).
Exemple : « non(P_1 et P_2) » i.e. « non(P_1) ou non(P_2) »
Point de vue ensembliste :
$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
$\overline{\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i}=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\overline{A_i}$
  </td><td colspan="2"></td><td>La négation d'une disjonction (non exclusive) est une conjonction.
Exemple : « non(P_1 ou P_2) » i.e. « non(P_1) et non(P_2) »
Point de vue ensembliste :
$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
$\overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i}=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\overline{A_i}$
  </td></tr>
</table>

Propositions conditionnelles

	Implication : $\overset{\text{seulement si}}{\Rightarrow}$	Équivalence : $\overset{\text{si}}{\Leftarrow}$ et $\overset{\text{seulement si}}{\Rightarrow}$
Énoncés	Soient H (pour « Hypothèse ») et C (pour « Conclusion ») deux propositions logiques, la proposition « $H \Rightarrow C$ », qui se lit « H implique C » correspond aux énoncés suivants qui sont tous identiques du point de vue logique : ▶ si H est vraie alors C est vraie ▶ H est vraie seulement si C est vraie ▶ H vraie suffit pour que C soit vraie ▶ la validité de H est une condition suffisante pour assurer la validité de C ▶ C est vraie car H est vraie ▶ C est vraie si H est vraie ▶ il faut C vraie pour que H soit vraie ▶ la validité de C est une condition nécessaire pour assurer la validité de H Exemple : Pour x réel, « $x<-3 \Rightarrow x^2>9$ » est vraie car la fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.	Soient P et Q deux propositions logiques, la proposition « $P \Leftrightarrow Q$ », qui se lit « P est équivalent à Q », correspond aux énoncés suivants qui sont tous identiques d'un point de vue logique : ▶ P est vraie si et seulement si Q est vraie ▶ pour que P soit vraie, il faut et il suffit que Q soit vraie ▶ la validité de P est une condition nécessaire et suffisante pour la validité de Q La proposition « $P \Leftrightarrow Q$ » est donc la proposition « $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ » c'est à dire « $(P \Rightarrow Q)$ et $(\text{non}(P) \Rightarrow \text{non}(Q))$ » Exemple : « $x^2<9 \Leftrightarrow \lvert x\rvert<3$ » est vraie.
Point de vue booléen	« H ⇒ C » i.e. « non(H) ou (H et C) » i.e. « non(H) ou C » Exemple : Pour x réel, « $x<-3 \Rightarrow x^2>9$ » i.e.« $x\geqslant -3$ ou $x^2>9$ »	« P ⇔ Q » i.e. « (non(P) et non(Q)) ou (P et Q) » Exemple : « $x^2<9 \Leftrightarrow \lvert x\rvert<3$ » i.e « ($x^2\geqslant 9$ et $\lvert x\rvert\geqslant 3$) ou ($x^2<9$ et $\lvert x\rvert<3$) »
Point de vue ensembliste	« $x\in A \Rightarrow x\in B$ » i.e. « $A\subset B$ » Remarque : « $x\in A$ » se lit « x appartient à A » « A ⊂ B» se lit « A est inclus dans B » 	« $x\in A \Leftrightarrow x\in B$ » i.e. « $\begin{cases} A\subset B \\ B\subset A \end{cases}$ » i.e.« $A=B$ » 
Proposition universelle sous-jacente	« x vérifie C_1 implique x vérifie C_2 » est la proposition universelle « pour tout x vérifiant C_1, x vérifie C_2 ».	« x vérifie C_1 est équivalent à x vérifie C_2 » est la conjonction : « pour tout x vérifiant C_1, x vérifie C_2, et pour tout x ne vérifiant pas C_1, x ne vérifie pas C_2 ».
Contraposée/ contraires	« H ⇒ C » i.e. « non(C) ⇒ non(H) » Exemple : Pour x réel, « $x<-3 \Rightarrow x^2>9$ » i.e. « $x^2\leqslant 9 \Rightarrow x\geqslant -3$ » Interprétation ensembliste : « $A\subset B$ » i.e. « $\overline{A}\supset\overline{B}$ »	« $P\Leftrightarrow Q$ » est « $\text{non}(P)\Leftrightarrow\text{non}(Q)$ » Exemple : « $x^2<9 \Leftrightarrow \lvert x\rvert<3$ » i.e. « $x^2\geqslant 9 \Leftrightarrow \lvert x\rvert\geqslant 3$ » Interprétation ensembliste : « $A=B$ » i.e. « $\overline{A}=\overline{B}$ »
Transitivité	Si « $H_1\Rightarrow H_2$ et $H_2\Rightarrow C$ » est vraie alors « $H_1\Rightarrow C$ » est vraie.	Si « $P_1\Leftrightarrow P_2$ et $P_2\Leftrightarrow P_3$ » est vraie alors « $P_1\Leftrightarrow P_3$ » est vraie.
Comment valider ?	Démontrer à l'aide de déductions que l'hypothèse entraîne bien la conclusion. Valider la proposition universelle sous-jacente. Valider la proposition contraposée.	Démontrer à l'aide d'enchaînements d'équivalences : P ⇔ ... ⇔ Q. Le raisonnement par analyse-synthèse, qui consiste à déterminer les conditions nécessaires ($P\Rightarrow Q$) puis les conditions suffisantes ($Q\Rightarrow P$).
Comment invalider ?	Exhiber un contre-exemple pour lequel H est vraie et C est fausse. Invalider la proposition universelle sous-jacente. Invalider la proposition contraposée.	Pour invalider une équivalence il suffit d'invalider l'implication ou sa réciproque.
Réciproque/ implications circulaires	La proposition réciproque de « $H\Rightarrow C$ » est la proposition « $C\Rightarrow H$ ». ⚠ La proposition « $H\Rightarrow C$ » peut être vraie et sa réciproque « $C\Rightarrow H$ » fausse. Exemple : « $x^2>9 \Rightarrow x<-3$ » est fausse, contre-exemple : $x=4$	Si « $P_1\Rightarrow P_2\Rightarrow P_3\Rightarrow P_1$ » est vraie alors « $P_1\Leftrightarrow P_2\Leftrightarrow P_3$ » est vraie.