

# Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

Les fonctions étudiées ici sont définies sur un intervalle d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## I. Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle.....p.1

Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$  ou  $[a; +\infty[$  (ou  $]a; b]$  ou  $]-\infty; b]$ .

Extension à l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle ouvert  $]a; b[$  ou  $]-\infty; +\infty[$ .

Relation de Chasles. Intégrales de référence.

Théorèmes de comparaison : majoration ou équivalence.

Théorème de changement de variables.

## II. Intégrabilité d'une fonction continue sur un intervalle.....p.8

Définition de l'intégrabilité d'une fonction continue sur un intervalle.

Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue et intégrable sur un intervalle : convergence de l'intégrale, linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire, caractérisation de la fonction nulle.

### I. Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

La notion d'intégrale concerne pour l'instant les fonctions continues sur un intervalle fermé borné  $[a; b]$ . Dans ce cas les méthodes des rectangles ou des trapèzes permettent d'obtenir une approximation numérique de la valeur de l'intégrale.

Exemples de codes python pour l'approximation numérique de  $\int_0^1 x^2 dx$

```
1 def carre(x):
2     return x**2
3
4 def rectangles(f,a,b,n):
5     dx=(b-a)/n
6     s=0
7     for k in range(n):
8         s=s+f(a+k*dx)*dx
9     return s
10
11 print(rectangles(carre,0,1,1000))
0.33283350000000034
```

```
1 def carre(x):
2     return x**2
3
4 def trapeze(f,a,b,n):
5     dx=(b-a)/n
6     s=f(a)/2*dx
7     for k in range(1,n):
8         s=s+f(a+k*dx)*dx
9     s=s+f(b)/2*dx
10    return s
11
12 print(trapeze(carre,0,1,1000))
0.33333350000000034
```

Utilisation de numpy ou de sympy :

```
1 import numpy as np
2
3 x=np.arange(0,1,0.001)
4 y=[t**2 for t in x]
5 print(np.trapz(y,x))
0.3323344995
```

```
1 from sympy import *
2 x=symbols('x')
3 pprint(integrate(x**2,(x,0,1)))
1/3
```

Exemple de code python utilisant le module sympy pour la recherche d'une primitive :

```
1 from sympy import *
2 t = symbols('t')
3
4 pprint(integrate(ln(t),t))
5 pprint(integrate(1/t,t))
6 pprint(integrate(exp(t**2),t))
```

```
t*log(t) - t
log(t)
sqrt(pi)*erfi(t)
| 2
```

Remarque : l'affichage résultant de l'exécution de la ligne 5 met en évidence une lacune...

### Théorème fondamental de l'analyse appliqué au calcul d'une intégrale sur un intervalle fermé borné

Soient un intervalle  $[a; b]$  et  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ .

Si  $f$  est continue sur  $[a; b]$  alors  $f$  admet une primitive  $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$  et  $\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

Cherchez l'erreur :  $\int_{-1}^1 \frac{1}{t^2} dt = \left[ -\frac{1}{t} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{1} - \left( -\frac{1}{-1} \right) = -2$  ???

Démonstration : Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ .

► Existence d'une primitive : en posant  $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ . Soient  $x \in [a; b]$  et  $h \in \mathbb{R}^*$  tel que  $x+h \in [a; b]$  alors :

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt \text{ et } \int_x^{x+h} f(x) dt = hf(x)$$

$$\text{donc } \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \left( \int_x^{x+h} f(t) dt + \int_x^{x+h} f(x) dt \right) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right|$$

Pour  $h > 0$ , on a donc :  $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt$

Pour  $h < 0$ , on a donc :  $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \frac{1}{-h} \int_{x+h}^x |f(t) - f(x)| dt = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt$

Or  $f$  étant continue en  $x$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \eta > 0$  tel que  $|x-t| < \eta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$

Donc  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists h \in \mathbb{R}^*$  tel que  $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \frac{h}{h} \varepsilon = \varepsilon$

Ce qui signifie que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$  donc  $F'(x) = f(x)$

Ainsi  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[a; b]$  et  $F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$  ainsi on a bien :  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

► Résultat indépendant du choix d'une primitive car deux primitives de  $f$  sur  $[a; b]$  diffèrent d'une constante.

Soient  $F$  et  $G$  deux primitives de  $f$  sur  $[a; b]$ , d'après l'inégalité des accroissements finis (le théorème des accroissements finis n'étant pas valide pour les fonctions à valeurs complexes) appliqué à la fonction  $x \mapsto F(x) - G(x)$  dérivable sur  $[a; b]$ , donne  $|F(b) - G(b) - (F(a) - G(a))| \leq \sup_{c \in [a; b]} |F'(c) - G'(c)| \times |b - a|$

or  $\forall c \in ]a; b[$ ,  $F'(c) - G'(c) = f(c) - f(c) = 0$  donc  $F(b) - G(b) = F(a) - G(a)$

Ainsi :  $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$  □

L'objectif de ce cours est d'étendre cette notion pour définir les intégrales de fonctions continues sur un intervalle non fermé ou non borné :  $]a; b[$  ou  $[a; +\infty[$  puis  $]a; b[$  ou  $]-\infty; b[$  ou encore  $]a; b[$ .

Définition d'une intégrale généralisée sur un intervalle  $]a; b[$  ou  $[a; +\infty[$

Soient deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$  et  $f$  une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

► si  $f$  est continue sur  $]a; b[$  alors l'intégrale généralisée de  $f$  sur l'intervalle  $]a; b[$  est définie par :

$$\int_a^b f(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{T \rightarrow b \\ T < b}} \int_a^T f(t) dt$$

► si  $f$  est continue sur  $[a; +\infty[$  alors l'intégrale généralisée de  $f$  sur l'intervalle  $[a; +\infty[$  est définie par :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_a^T f(t) dt$$

Remarques : pour un intervalle  $]a; b[$  on a  $\int_a^b f(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{T \rightarrow a \\ T > a}} \int_T^b f(t) dt$  et pour  $]-\infty; b[$ ,  $\int_{-\infty}^b f(t) dt = \lim_{T \rightarrow -\infty} \int_T^b f(t) dt$ .

Si  $f$  est à valeur dans  $\mathbb{C}$ , la définition de l'intégrale donne pour  $T \in ]a; b[$  :

$$\int_a^T f(t) dt = \int_a^T \text{Re}(f(t)) dt + i \int_a^T \text{Im}(f(t)) dt$$

Puis la définition des limites dans  $\mathbb{C}$  donne :  $\lim_{\substack{T \rightarrow b \\ T < b}} \int_a^T f(t) dt = \lim_{\substack{T \rightarrow b \\ T < b}} \int_a^T \text{Re}(f(t)) dt + i \lim_{\substack{T \rightarrow b \\ T < b}} \int_a^T \text{Im}(f(t)) dt$

Exemples :  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ ,  $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$  ou  $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt$  sont des intégrales généralisées car...

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ ;  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$  et  $\int_0^{+\infty} \sin(t) dt$  sont des intégrales généralisées car...

Cas des fonctions prolongeables par continuité

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $]a; b[$ .

Si  $f$  est prolongeable par continuité sur l'intervalle  $]a; b[$  alors  $\int_a^b f(t) dt$  est dite faussement impropre et en notant

$$\tilde{f} \text{ son prolongement on a : } \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \tilde{f}(t) dt$$

Démonstration : Soit  $T \in ]a; b[$ ,  $\int_a^T f(t) dt - \int_a^T \tilde{f}(t) dt = \int_a^T f(t) dt - \left( \int_a^T \tilde{f}(t) dt + \int_T^b \tilde{f}(t) dt \right) = - \int_T^b \tilde{f}(t) dt$

Soit  $\tilde{f}$  étant continue sur l'intervalle fermé borné  $[a; b]$ , il existe  $M = \max_{t \in [a; b]} |\tilde{f}(t)|$

$$\left| \int_a^T f(t) dt - \int_a^T \tilde{f}(t) dt \right| = \left| \int_T^b \tilde{f}(t) dt \right| \leq M(b - T)$$

Donc  $\lim_{\substack{T \rightarrow b \\ T < b}} \left| \int_a^T f(t) dt - \int_a^T \tilde{f}(t) dt \right| = 0$  d'où :  $\lim_{\substack{T \rightarrow b \\ T < b}} \int_a^T f(t) dt = \int_a^b \tilde{f}(t) dt$  □

## Définition de la convergence d'une intégrale généralisée

Soient deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$  et  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

► si  $I = [a; b[$  alors : l'intégrale généralisée  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente si et seulement si elle est finie.

► si  $I = [a; +\infty[$  alors : l'intégrale généralisée  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  est convergente si et seulement si elle est finie.

Une intégrale généralisée non convergente est dite divergente.

Remarque : on étend naturellement cette définition au cas d'un intervalle  $]a; b]$  ou  $]-\infty; b]$ .

Exemples :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t} dt$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(t) dt$$

Exemple de code python utilisant les module numpy ou le module sympy pour calculer des intégrales généralisées :

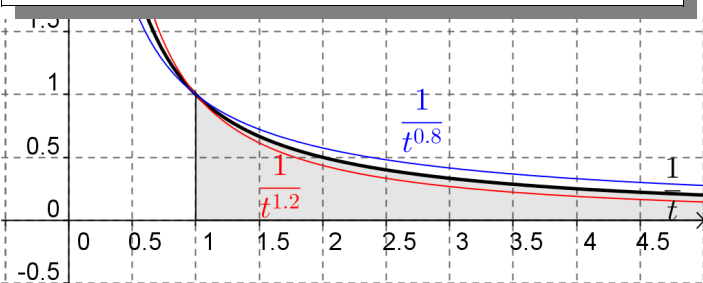
```
1 import numpy as np
2 import scipy.integrate as integr
3
4 print(integr.quad(np.log,0,1))
5
6 def f(x):
7     return 1/x**2
8
9 print(integr.quad(f,1,np.inf))
(-1.0000000000000004, 1.6653345369377348e-15)
(1.0, 1.1102230246251565e-14)
```

```
1 from sympy import *
2 t = symbols('t')
3
4 pprint(integrate(ln(t), (t, 0, 1)))
5 pprint(integrate(1/t**2, (t, 1, +oo)))
-1
1
```

Intégrales généralisées de référence : soit un réel  $\alpha$  ...

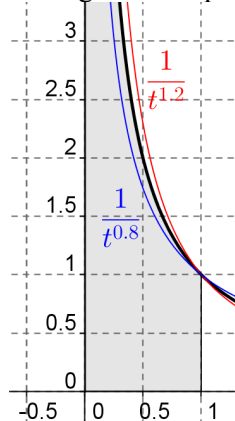
Critère de Riemann

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$  est convergente si et seulement si  $\alpha > 1$

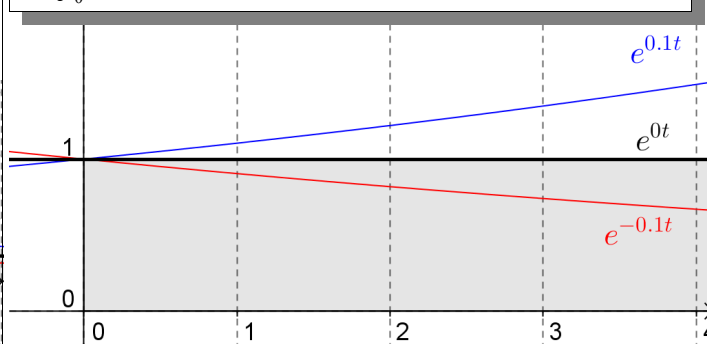


$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$  est convergente si et seulement si  $\alpha < 1$

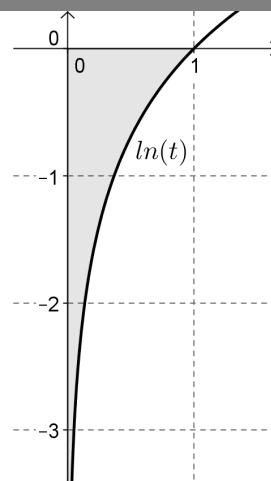
(si  $\alpha \leq 0$  cette intégrale n'est pas généralisée)



$\int_0^{+\infty} e^{\alpha t} dt$  est convergente si et seulement si  $\alpha < 0$



$\int_0^1 \ln(t) dt$  est convergente



Démonstrations : soit  $\varepsilon > 0$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  est continue sur l'intervalle  $[\varepsilon; 1]$  et :

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \dots$$

Donc ...

Soit  $T > 1$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  est continue sur l'intervalle  $[1; T]$  et :

$$\int_1^T \frac{1}{t^\alpha} dt = \dots$$

Donc...

Soit  $T > 0$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto e^{\alpha t}$  est continue sur l'intervalle  $[0; T]$  et :

$$\int_0^T e^{\alpha t} dt = \dots$$

Donc...

Soit  $\varepsilon > 0$ , la fonction  $t \mapsto \ln(t)$  est continue sur l'intervalle  $[\varepsilon; 1]$  et :

$$\int_{\varepsilon}^1 \ln(t) dt = \dots$$

Donc...

□

#### Définition de la convergence d'une intégrale sur un intervalle ouvert

Soient  $I$  un intervalle ouvert ( $]a; b[$  ;  $]a; +\infty[$ ,  $]-\infty; b[$  ou  $]-\infty; +\infty[$ ) et  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

L'intégrale généralisée  $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t) dt$  est convergente si et seulement si il existe un réel  $c \in I$  tel que  $\int_{\inf I}^c f(t) dt$  et  $\int_c^{\sup I} f(t) dt$  soient convergentes.

⚠ En général,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \neq \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T f(t) dt$ . Exemple :  $\forall T \in \mathbb{R}$ ,  $\int_{-T}^T t dt = \dots$

#### Relation de Chasles pour les intégrales généralisées

Soient  $I$  un intervalle et  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Si l'intégrale généralisée  $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t) dt$  est convergente alors  $\forall c \in I$ ,  $\int_{\inf I}^c f(t) dt$  et  $\int_c^{\sup I} f(t) dt$  sont convergentes

$$\text{et : } \int_{\inf I}^{\sup I} f(t) dt = \int_{\inf I}^c f(t) dt + \int_c^{\sup I} f(t) dt$$

Exemple : soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$  converge si et seulement si  $\begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge} \\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$

Conclusion :  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \dots$

Démonstration : Par définition, si l'intégrale généralisée  $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t) dt$  est convergente alors  $\exists c \in I$  tel que  $\int_{\inf I}^c f(t) dt$  et  $\int_c^{\sup I} f(t) dt$  soient convergentes et  $\forall T' \in I \cap ]-\infty; c[$  et  $\forall T \in I \cap ]c; +\infty[$ ,  $\int_{T'}^c f(t) dt + \int_c^T f(t) dt = \int_{T'}^T f(t) dt$

Ainsi, par passage à la limite :  $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t) dt = \int_{\inf I}^c f(t) dt + \int_c^{\sup I} f(t) dt$

Soit  $c' \in I$ , si  $c' < c$  alors  $\int_{T'}^{c'} f(t) dt + \int_{c'}^c f(t) dt = \int_{T'}^c f(t) dt$  donc  $\int_{T'}^{c'} f(t) dt = \int_{T'}^c f(t) dt - \int_{c'}^c f(t) dt$

Donc,  $\int_{\inf I}^c f(t) dt$  étant convergente,  $\int_{\inf I}^{c'} f(t) dt$  est convergente.

De plus,  $\int_{c'}^T f(t) dt = \int_{c'}^c f(t) dt + \int_c^T f(t) dt$  donc  $\int_{T'}^{c'} f(t) dt + \int_{c'}^T f(t) dt = \int_{T'}^T f(t) dt$

Ainsi, par passage à la limite :  $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t) dt = \int_{\inf I}^{c'} f(t) dt + \int_{c'}^{\sup I} f(t) dt$ .

Par un raisonnement analogue, on montre que l'égalité est valide si  $c' > c$ . □

⚠ Les résultats suivants s'appliquent aux fonctions positives sur un intervalle. Si  $f$  est négative sur  $I$ , il suffit d'étudier la convergence de l'intégrale  $\int_I -f(t) dt$  pour pouvoir appliquer les théorèmes.

**Théorème de comparaison pour les fonctions positives**

Soient  $I$  un intervalle non fermé ou non borné,  $f$  et  $g$  deux fonctions continues et positives sur  $I$ , telles que :

$$\forall t \in I, f(t) \leq g(t)$$

Majoration par une fonction « intégrable » : si  $\int_{\inf I}^{\sup I} g(t) dt$  converge alors  $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t) dt$  converge.

Minoration par une fonction « non intégrable » : si  $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t) dt$  diverge alors  $\int_{\inf I}^{\sup I} g(t) dt$  diverge.

Démonstration : Soit  $I$  un intervalle du type  $[a; b[$  ou  $[a; +\infty[$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions continues et positives sur  $I$ .

La fonction  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$   
 $T \mapsto \int_a^T f(t) dt$  est croissante sur l'intervalle  $I$  donc le théorème de la limite monotone assure que :

ou bien  $\lim_{\substack{T \rightarrow \sup I \\ T \in I}} \int_a^T f(t) dt$  existe et est finie

ou bien  $\lim_{\substack{T \rightarrow \sup I \\ T \in I}} \int_a^T f(t) dt = +\infty$ .

De plus  $\lim_{\substack{T \rightarrow \sup I \\ T \in I}} \int_a^T f(t) dt$  existe et est finie si et seulement  $\exists M \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall T \in I, \int_a^T f(t) dt \leq M$ . i.e.  $F$  est majorée sur l'intervalle  $I$ .

Les mêmes arguments s'appliquent pour  $G: I \rightarrow \mathbb{R}$   
 $T \mapsto \int_a^T g(t) dt$  et  $\lim_{\substack{T \rightarrow \sup I \\ T \in I}} \int_a^T g(t) dt$ .

Par ailleurs, si  $\forall t \in I, f(t) \leq g(t)$  alors la croissance de l'intégrale assure que  $\forall T \in I, \int_a^T f(t) dt \leq \int_a^T g(t) dt$ .

► Si  $\int_a^{\sup I} g(t) dt$  converge alors  $\exists M \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall T \in I, \int_a^T g(t) dt \leq M$

Donc  $\forall T \in I, \int_a^T f(t) dt \leq M$ , ainsi le théorème de la limite monotone assure que  $\int_a^{\sup I} f(t) dt$  converge.

► Si  $\int_a^{\sup I} f(t) dt$  diverge alors le théorème de la limite monotone assure que  $\lim_{\substack{T \rightarrow \sup I \\ T \in I}} \int_a^T f(t) dt = +\infty$

Donc le théorème de divergence par comparaison assure que  $\lim_{\substack{T \rightarrow \sup I \\ T \in I}} \int_a^T g(t) dt = +\infty$  donc  $\int_a^{\sup I} g(t) dt$  diverge.

Le cas d'un intervalle semi-ouvert du type  $]-\infty; b]$  ou  $]a; b]$  se traite de façon analogue en envisageant  $\lim_{\substack{T \rightarrow \inf I \\ T \in I}} \int_T^b f(t) dt$

et  $\lim_{\substack{T \rightarrow \inf I \\ T \in I}} \int_T^b g(t) dt$ .

Le cas d'un intervalle ouvert  $]-\infty; +\infty[$  ou  $]a; b[$  se traite en introduisant  $c \in I$  et en étudiant les intégrales généralisées  $\int_{\inf I}^c f(t) dt$  et  $\int_c^{\sup I} f(t) dt$ . □

Exemple : Étudier la convergence des intégrales généralisées :  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$

Remarque : la question de la convergence de l'intégrale généralisée repose sur des considérations locales ainsi : pour  $I = ]a; b]$ , une comparaison au voisinage de  $b$  est suffisante

- pour  $I=]a; b]$ , une comparaison au voisinage de  $a$  est suffisante
- pour  $I=[a; +\infty[$ , une comparaison pour les valeurs de  $t$  suffisamment grandes est suffisante.
- pour  $I=]-\infty; b]$ , une comparaison pour les valeurs de  $t$  suffisamment petites est suffisante.

**Corollaire pour les fonctions admettant une limite non nulle à l'infini**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a; +\infty[$ .

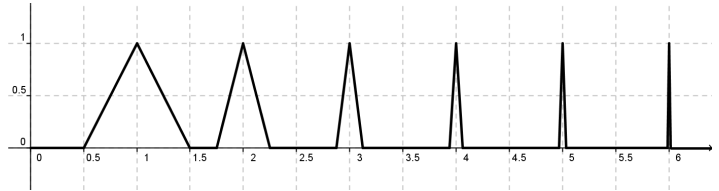
S'il existe  $L \in \mathbb{R}^*$  tel que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  alors l'intégrale généralisée  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  est grossièrement divergente.

Démonstration : si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \neq 0$  alors pour  $\varepsilon = \frac{L}{2}$ , il existe un réel  $T > a$  tel que  $\forall x > T, |f(x) - L| < \varepsilon$  donc...

⚠ Si la fonction  $f$  admet une limite en  $+\infty$ , il est donc nécessaire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  pour espérer la convergence de l'intégrale généralisée  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  mais cette condition n'est bien sûr pas suffisante pour assurer la convergence de l'intégrale généralisée (cf intégrales de Riemann par exemple).

⚠ Si la fonction  $f$  n'admet pas de limite en  $+\infty$  l'intégrale généralisée peut néanmoins être convergente.

Exemple : soit  $f$  la fonction affine par morceaux représentée ci-contre : la base d'un « triangle » centré sur un entier  $k$  étant de longueur  $\frac{1}{2^k}$  et sa hauteur étant de 1,



$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \dots$$

**Théorème pour les fonctions positives équivalentes**

Soient  $I$  un intervalle semi-ouvert,  $f$  et  $g$  deux fonctions continues et positives sur  $I$ .

si  $I=[a; b[$  et  $f \sim_b g$  alors les intégrales généralisées  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_a^b g(t) dt$  sont de même nature.

si  $I=]a; b]$  et  $f \sim_a g$  alors les intégrales généralisées  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_a^b g(t) dt$  sont de même nature.

si  $I=[a; +\infty[$  et  $f \sim_{+\infty} g$  alors les intégrales généralisées  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  et  $\int_a^{+\infty} g(t) dt$  sont de même nature.

si  $I=]-\infty; b]$  et  $f \sim_{-\infty} g$  alors les intégrales généralisées  $\int_{-\infty}^b f(t) dt$  et  $\int_{-\infty}^b g(t) dt$  sont de même nature.

Démonstration : si  $I=[a; b[$  et  $f \sim_b g$  alors il existe  $a' \in I$  tel que :  $\forall t \in ]a'; b[$ ,  $f(t) = \alpha(t) \times g(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow b} \alpha(t) = 1$

Donc il existe un intervalle  $]a''; b[ \subset ]a'; b[$  tel que  $\forall t \in ]a''; b[$ ,  $|\alpha(t) - 1| < 0,1 \dots$

Donc...

Remarque : si  $f \sim_b g$  alors  $f$  et  $g$  ont le même signe au voisinage de  $b$ . Ainsi, si l'une des deux fonctions  $f$  ou  $g$  est strictement positive alors ce critère peut encore s'appliquer avec précaution :

En effet si  $f \sim_b g$  et  $\forall t \in I, g(t) > 0$  alors  $\lim_{t \rightarrow b} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$  donc il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\forall t \in ]b - \varepsilon; b[$ ,  $\frac{f(t)}{g(t)} > 0$

ainsi,  $\forall t \in ]b - \varepsilon; b[$ ,  $f(t) > 0$ .

Le critère d'équivalence précédent assure donc que les intégrales généralisées  $\int_{b-\varepsilon}^b f(t) dt$  et  $\int_{b-\varepsilon}^b g(t) dt$  sont de même nature. Les intégrales  $\int_a^{b-\varepsilon} f(t) dt$  et  $\int_a^{b-\varepsilon} g(t) dt$  n'étant pas généralisées, les intégrales généralisées  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_a^b g(t) dt$  sont elles aussi de même nature.

Exemple : étude des intégrales généralisées :  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \sqrt{t}} dt$  et  $\int_0^{4\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t} dt$

## Théorème de changement de variables pour les intégrales généralisées

Soient  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $]a; b[$  avec  $a \in \mathbb{R} \cup ]-\infty; -\infty[$  et  $b \in \mathbb{R} \cup ]+\infty; +\infty[$ ,  
 et  $\varphi$  une fonction strictement croissante et de classe  $C^1$  sur un intervalle  $]\alpha; \beta[$  avec  $\alpha \in \mathbb{R} \cup ]-\infty; -\infty[$  et  $\beta \in \mathbb{R} \cup ]+\infty; +\infty[$

telle que 
$$\begin{cases} \lim_{\substack{u \rightarrow \alpha \\ u \in ]\alpha; \beta[}} \varphi(u) = a \\ \lim_{\substack{u \rightarrow \beta \\ u \in ]\alpha; \beta[}} \varphi(u) = b \end{cases}$$

i.e  $\varphi$  réalise une bijection croissante de  $]\alpha; \beta[$  dans  $]a; b[$  de classe  $C^1$  :

$$\begin{array}{ccc} ]\alpha; \beta[ & \rightarrow & ]a; b[ \\ t & \mapsto & \varphi^{-1}(t) = u \\ t = \varphi(u) & \leftarrow & u \end{array}$$

Alors  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \times \varphi'(u) du$  sont de même nature.

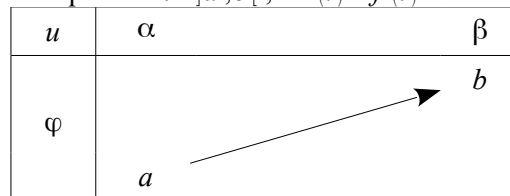
Si  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente alors :  $\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \times \varphi'(u) du$ .

$$\int_{\substack{\lim_{u \rightarrow \beta} \varphi(u) \\ u \in ]\alpha; \beta[}}^{\substack{\lim_{u \rightarrow \alpha} \varphi(u) \\ u \in ]\alpha; \beta[}} f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du \quad \text{ou avec I un intervalle} \quad \int_{\varphi(I)} f(t) dt = \int_I f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

Démonstration :

$f$  étant continue sur  $]a; b[$ , il existe une fonction  $F$  de classe  $C^1$  sur  $]a; b[$  telle que :  $\forall t \in ]a; b[, F'(t) = f(t)$ .

$\varphi$  étant strictement croissante sur  $]\alpha; \beta[$  et telle que 
$$\begin{cases} \lim_{\substack{u \rightarrow \alpha \\ u \in ]\alpha; \beta[}} \varphi(u) = a \\ \lim_{\substack{u \rightarrow \beta \\ u \in ]\alpha; \beta[}} \varphi(u) = b \end{cases}$$
, on a :



Ainsi,  $\forall u \in ]\alpha; \beta[, \varphi(u) \in ]a; b[$  et on peut considérer la composition :

$$\begin{array}{ccc} ]\alpha; \beta[ & \xrightarrow{\varphi} & ]a; b[ & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \\ u & \mapsto & \varphi(u) & \mapsto & F(\varphi(u)) \end{array}$$

Soit la fonction  $G = F \circ \varphi$ , par composition de fonctions de classe  $C^1$ , la fonction  $G$  est de classe  $C^1$  sur  $]\alpha; \beta[$  et  $\forall u \in ]\alpha; \beta[, G'(u) = F'(\varphi(u)) \times \varphi'(u) = f(\varphi(u)) \times \varphi'(u)$

Soit  $\gamma \in ]\alpha; \beta[$ , on étudie la nature des intégrales généralisées  $\int_\alpha^\gamma f(\varphi(u)) \times \varphi'(u) du$  et  $\int_\gamma^\beta f(\varphi(u)) \times \varphi'(u) du$

Soit  $\alpha' \in ]\alpha; \gamma[$ ,  $\int_{\alpha'}^\gamma f(\varphi(u)) \times \varphi'(u) du = [G(u)]_{u=\alpha'}^{\gamma} = F(\varphi(\gamma)) - F(\varphi(\alpha'))$

Or  $\varphi(\alpha') \in ]a; b[$ ,  $\lim_{\substack{\alpha' \rightarrow \alpha \\ \alpha' \in ]\alpha; \beta[}} \varphi(\alpha') = a$  et  $F$  étant continue sur  $]a; b[$  on a :  $\lim_{\substack{T \rightarrow a \\ T \in ]a; b[}} F(\varphi(\alpha')) = \lim_{\substack{T \rightarrow a \\ T \in ]a; b[}} F(T)$

Ainsi  $\int_\alpha^\gamma f(\varphi(u)) \times \varphi'(u) du$  est convergente  $\Leftrightarrow \lim_{\substack{T \rightarrow a \\ T \in ]a; b[}} F(T)$  existe et est finie  $\Leftrightarrow \int_a^{\varphi(\gamma)} f(t) dt$  est convergente.

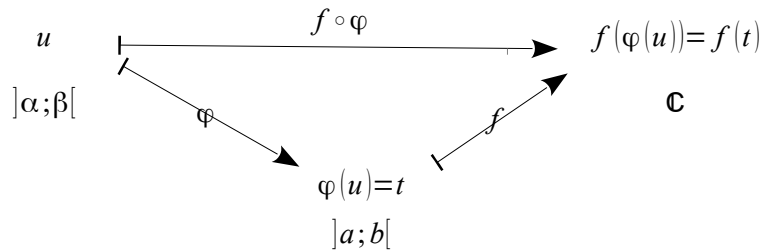
De plus si  $\lim_{\substack{T \rightarrow a \\ T \in ]a; b[}} F(T)$  existe et est finie alors  $\int_\alpha^\gamma f(\varphi(u)) \times \varphi'(u) du = \int_a^{\varphi(\gamma)} f(t) dt$

De même :  $\int_\gamma^\beta f(\varphi(u)) \times \varphi'(u) du$  est convergente  $\Leftrightarrow \lim_{\substack{T \rightarrow b \\ T \in ]a; b[}} F(T)$  existe et est finie  $\Leftrightarrow \int_{\varphi(\gamma)}^b f(t) dt$  est convergente.

De plus si  $\lim_{\substack{T \rightarrow b \\ T \in ]a; b[}} F(T)$  existe et est finie alors  $\int_\gamma^\beta f(\varphi(u)) \times \varphi'(u) du = \int_{\varphi(\gamma)}^b f(t) dt$ .

La relation de Chasles permet de conclure pour  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \times \varphi'(u) du$ . □

Remarques :  $f(t) \in \mathbb{C}, f(\varphi(u)) \in \mathbb{C}$  mais  $\varphi(u) \in \mathbb{R}$  et  $\varphi'(u) \in \mathbb{R}$ .



On note souvent  $t = \varphi(u)$ ,  $\varphi ]\alpha; \beta[ = ]a; b[$  et  $dt = \varphi'(u) du$

Exemples :  $\int_0^{\pi^2} \frac{\cos(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} dt = \dots$

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , étudier la nature de  $\int_a^{a+1} \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt \dots$

⚠ Un changement de variable peut transformer une intégrale simple en intégrale généralisée.

Exemple :  $\int_0^\pi \frac{1}{2 + \cos(t)} dt$  en posant  $u = \tan \frac{t}{2} \dots$

**Adaptation au cas où  $\varphi$  est strictement décroissante**

Soient  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $]a; b[$  avec  $a \in \mathbb{R} \cup ]-\infty; -\infty[$  et  $b \in \mathbb{R} \cup ]+\infty; +\infty[$ , et  $\varphi$  une fonction strictement décroissante et de classe  $C^1$  sur un intervalle  $]\alpha; \beta[$  avec  $\alpha \in \mathbb{R} \cup ]-\infty; -\infty[$  et  $\beta \in \mathbb{R} \cup ]+\infty; +\infty[$

telle que  $\begin{cases} \lim_{\substack{u \rightarrow \alpha \\ u \in ]\alpha; \beta[}} \varphi(u) = b \\ \lim_{\substack{u \rightarrow \beta \\ u \in ]\alpha; \beta[}} \varphi(u) = a \end{cases}$ .

i.e  $\varphi$  réalise une bijection décroissante de  $]\alpha; \beta[$  dans  $]a; b[$  de classe  $C^1$  :

$]a; b[$	$\rightarrow$	$]\alpha; \beta[$
$t$	$\mapsto$	$\varphi^{-1}(t) = u$
$t = \varphi(u)$	$\leftarrow$	$u$

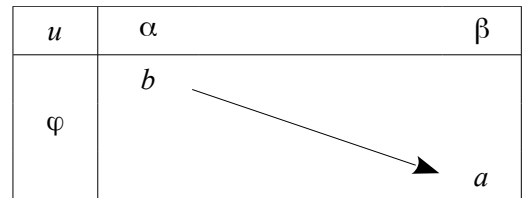
Alors  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \times |\varphi'(u)| du$  sont de même nature.

Si  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente alors :  $\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \times |\varphi'(u)| du$ .

$$\int_{\substack{u \rightarrow \alpha \\ u \in ]\alpha; \beta[}}^{\substack{u \rightarrow \beta \\ u \in ]\alpha; \beta[}} f(\varphi(u)) |\varphi'(u)| du \quad \text{ou avec } I \text{ un intervalle} \quad \int_{\varphi(I)} f(t) dt = - \int_I f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

Démonstration :

$\varphi$  étant strictement décroissante sur  $]\alpha; \beta[$  et telle que  $\begin{cases} \lim_{\substack{u \rightarrow \alpha \\ u \in ]\alpha; \beta[}} \varphi(u) = b \\ \lim_{\substack{u \rightarrow \beta \\ u \in ]\alpha; \beta[}} \varphi(u) = a \end{cases}$ ,



La démonstration est analogue à la précédente et on utilise le fait que pour  $[a'; b'] \subset I$ ,  $\int_{b'}^{a'} f(t) dt = F(b') - F(a') = - \int_{a'}^{b'} f(t) dt$  puis des passages à la limite. □

Remarque : dans les deux cas, la stricte monotonie de  $\varphi$  assure que  $\varphi(]\alpha; \beta[) = ]a; b[$  et donc que  $f \circ \varphi$  soit définie sur  $]\alpha; \beta[$  car  $\varphi$  est définie sur  $]a; b[$ .

## II. Intégrabilité d'une fonction continue sur un intervalle

Il s'agit d'étendre les propriétés des intégrales de fonctions continues sur un intervalle fermé borné au cas de certaines intégrales généralisées convergentes.



### Définition de l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle quelconque

Soient  $I$  un intervalle et  $f$  une fonction continue sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

La fonction  $f$  est dite intégrable sur  $I$  si et seulement si

$\int_{\inf I}^{\sup I} |f(t)| dt$  n'est pas une intégrale généralisée ou est une intégrale généralisée convergente.

Remarques : si  $\int_{\inf I}^{\sup I} |f(t)| dt$  est convergente l'intégrale  $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t) dt$  est dite « absolument convergente ».

Exemples : La fonction  $t \mapsto \ln(t)$  est intégrable sur  $]0; 1]$

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  n'est pas intégrable sur  $]0; 1]$

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  n'est pas intégrable sur  $[1; +\infty[$ .

⚠ Il faut éviter les confusions classiques :

« Intégrable sur intervalle  $I$  » n'est pas le contraire de « dérivable sur un intervalle  $I$  ».

« Intégrable sur un intervalle  $I$  » ne signifie pas « admet une primitive sur un intervalle  $I$  »

L'intégrabilité d'une fonction sur intervalle ne dépend pas de l'inclusion ou non des bornes de l'intervalle

Soit  $I$  un intervalle et  $f$  une fonction continue sur  $I$ , valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

$f$  est intégrable sur  $I$  si et seulement si  $f$  est intégrable sur l'intervalle  $] \inf I; \sup I [$

Remarque : cette propriété est triviale si  $I$  est un intervalle ouvert.

### Convergence de l'intégrale d'une fonction intégrable

Soient  $I$  un intervalle et  $f$  une fonction continue sur  $I$ , valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Si  $f$  est intégrable sur  $I$  alors  $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t) dt$  est convergente et est notée  $\int_I f(t) dt$ .

Idee de démonstration : soit  $I^+ = \{t \in I | f(t) \geq 0\}$  et  $I^- = \{t \in I | f(t) < 0\}$  on montre que si  $f$  est intégrable sur  $I$  alors

$\int_{I^+} |f(t)| dt$  et  $\int_{I^-} |f(t)| dt$  sont convergentes et  $\int_I f(t) dt = \int_{I^+} |f(t)| dt - \int_{I^-} |f(t)| dt$ . □

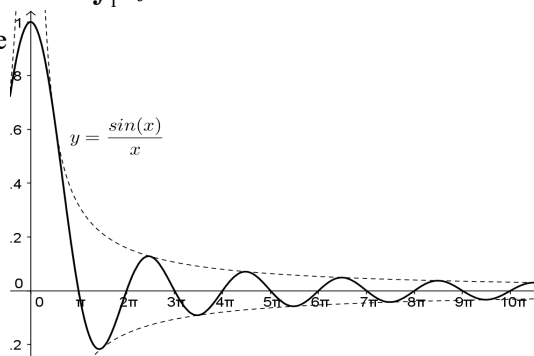
⚠ La réciproque de ce théorème n'est pas valide. Il est possible que

$\int_I f(t) dt$  soit convergente mais que  $\int_I |f(t)| dt$  soit divergente.

Les intégrales généralisées convergentes mais non absolument convergentes sont dites semi-convergentes. Par exemple, l'intégrale

de Dirichlet  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$  est convergente et vaut  $\frac{\pi}{2}$  mais n'est

pas absolument convergente. L'étude de ce type de convergence n'est pas un objectif du programme de TSI.



### Cas d'un intervalle borné

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $]a; b[$ .

Si la fonction  $f$  est bornée sur l'intervalle  $]a; b[$  alors  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente.

Démonstration : si  $f$  est bornée sur l'intervalle  $]a; b[$  alors il existe un réel  $M > 0$  tel que  $\forall t \in ]a; b[, |f(t)| \leq M$ . Or la fonction  $t \mapsto M$  est intégrable sur  $]a; b[$ , ainsi le théorème de majoration appliqué à la fonction  $t \mapsto |f(t)|$  à valeurs positives assure que  $\int_a^b |f(t)| dt$  est convergente donc  $f$  est intégrable sur  $]a; b[$  ainsi  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente. □

Exemple :  $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$  est...

Remarque : en particulier, si la fonction  $f$  admet des limites finies à droite du réel  $a$  et à gauche du réel  $b$  alors

$\int_a^b f(t) dt$  est convergente.

Propriété de linéarité de l'application  $f \mapsto \int_I f(t) dt$

Soient  $I$  un intervalle,  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Homogénéité : Si  $f$  est intégrable sur  $I$  alors la fonction  $\lambda f$  est intégrable sur  $I$  et  $\int_I \lambda f(t) dt = \lambda \int_I f(t) dt$

Additivité : Si  $f$  et  $g$  sont intégrables sur  $I$  alors la fonction  $f + g$  est intégrable sur  $I$  et

$$\int_I f(t) + g(t) dt = \int_I f(t) dt + \int_I g(t) dt$$

Démonstration : par extension des propriétés sur les intégrales à l'aide de passages à la limite. □

Cherchez l'erreur :????  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx$  ?????

Structure de l'ensemble de fonctions intégrables sur un intervalle

Soit  $I$  un intervalle.

L'ensemble des fonctions continues et intégrables sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  est un sous-espace vectoriel de  $C^0(I; \mathbb{K})$  noté  $C^0(I; \mathbb{K}) \cap L^1(I)$  (notation hors programme).

$$\begin{array}{ccc} C^0(I; \mathbb{K}) \cap L^1(I) & \rightarrow & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & \int_I f(t) dt \end{array} \text{ est une application linéaire.}$$

Démonstration : découle de la linéarité des intégrales généralisées. □

⚠ En général, le produit de deux fonctions intégrables sur un intervalle  $I$  n'est pas intégrable sur l'intervalle  $I$ .

Contre-exemple : la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$  est intégrable sur l'intervalle  $]0; 1]$  mais la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{\sqrt{t}}$  n'est pas intégrable sur l'intervalle  $]0; 1]$

Méthode : Intégrabilité du produit d'une fonction intégrable par une fonction bornée

Soit  $I$  un intervalle quelconque,

$f$  une fonction continue sur  $I$  et intégrable sur l'intervalle  $I$

et  $g$  une fonction continue et bornée sur l'intervalle  $I$

alors on peut démontrer que la fonction  $f \times g$  est intégrable sur l'intervalle  $I$ .

Démonstration : par produit, la fonction  $f \times g$  est continue sur l'intervalle  $I$ , de plus en notant  $M = \sup_I |g|$ , on a :

$\forall t \in I, |f(t) \times g(t)| = |f(t)| \times |g(t)| \leq M |f(t)|$  or  $f$  étant intégrable sur  $I$ ,  $t \mapsto M |f(t)|$  est intégrable sur  $I$ , ainsi le théorème de majoration par une fonction intégrable assure que  $\int_I |f(t) \times g(t)| dt$  est convergente donc  $f \times g$  est intégrable sur  $I$ . □

Rappels : deux résultats utiles pour prouver qu'une fonction est majorée sans avoir à déterminer son majorant.

► Une fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée et atteint ses bornes.

► Une fonction continue sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert et admettant des limites finies au bord de cet intervalle est bornée sur cet intervalle.

Démonstration pour un intervalle  $[a; +\infty[$  :

Soit  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = l$  alors pour  $\varepsilon = 1$  par exemple,  $\exists M > 0$  tel que  $x \geq M \Rightarrow l - 1 < f(x) < l + 1$

De plus  $f$  étant continue sur l'intervalle fermé borné  $[a; M]$ ,  $f$  est bornée et atteint ses bornes sur  $[a; M]$ .

Conclusion  $f$  est bornée sur  $[a; +\infty[$ . □

Exemples d'application :

► Nature de  $\int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt$  pour  $P(X) \in \mathbb{R}[X] \dots$

La fonction  $t \mapsto P(t) e^{-t}$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$ .

En effet, en notant  $P(t) = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \dots + \alpha_0$ , on a :  $|P(t)e^{-t}| \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} |\alpha_n| t^n e^{-t} = |\alpha_n| (t^{n+2} e^{-t}) \frac{1}{t^2}$

Or la fonction  $t \mapsto t^{n+2} e^{-t}$  est continue sur  $[1; +\infty[$  et, en vertu des croissances comparées,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n+2} e^{-t} = 0$  donc la fonction  $t \mapsto t^{n+2} e^{-t}$  est bornée sur  $[1; \infty[$ .

De plus, d'après le critère de Riemann, la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$ .

Donc, la fonction  $t \mapsto t^n e^{-t}$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$  et d'après le critère d'équivalence pour les fonctions positives, la fonction  $t \mapsto P(t)e^{-t}$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$ .

► Nature de  $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt \dots$

### Positivité et croissance de l'application $f \mapsto \int_1 f(t) dt$

Soient I un intervalle,  $f$  et  $g$  deux fonctions continues et intégrables sur I à valeurs réelles.

$$\text{Si } \forall t \in I, f(t) \geq 0 \text{ alors } \int_1 f(t) dt \geq 0$$

$$\text{Si } \forall t \in I, f(t) \geq g(t) \text{ alors } \int_1 f(t) dt \geq \int_1 g(t) dt$$

Démonstration : par extension des propriétés sur les intégrales à l'aide de passages à la limite. □

### Inégalité triangulaire pour les intégrales généralisées

Soient I un intervalle quelconque et  $f$  une fonction continue et intégrable sur I.

$$\left| \int_1 f(t) dt \right| \leq \int_1 |f(t)| dt$$

⚠ Si  $f$  est à valeurs réelles  $|f(t)|$  et  $\left| \int_1 f(t) dt \right|$  sont les valeurs absolues des réels  $f(t)$  et  $\int_1 f(t) dt$

Si  $f$  est à valeurs complexes  $|f(t)|$  et  $\left| \int_1 f(t) dt \right|$  sont les modules des complexes  $f(t)$  et  $\int_1 f(t) dt$

Démonstration : passage à la limite dans l'inégalité triangulaire pour les fonctions continues sur un intervalle fermé borné.

Rappel : démonstration de l'inégalité triangulaire pour  $f \in C^0([a; b]; \mathbb{R})$

$$\forall t \in [a; b], -|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)| \Rightarrow \dots$$

Démonstration de l'inégalité triangulaire pour  $f \in C^0([a; b]; \mathbb{C})$

La partie réelle d'un nombre complexe est majorée par le module de ce nombre complexe,  $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) \leq |z|$  donc :

$$\forall t \in [a; b], \operatorname{Re}\left(f(t) \times \int_a^b f(u) du\right) \leq \left|f(t) \times \int_a^b f(u) du\right| = |f(t)| \times \left|\int_a^b f(u) du\right|$$

Par croissance de l'intégrale pour les fonctions à valeurs réelles :

$$\int_a^b \operatorname{Re}\left(f(t) \times \int_a^b f(u) du\right) dt \leq \int_a^b |f(t)| \times \left|\int_a^b f(u) du\right| dt$$

Par définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes on a :

$$\operatorname{Re}\left(\int_a^b f(t) dt \times \int_a^b f(u) du\right) \leq \int_a^b |f(t)| dt \times \left|\int_a^b f(u) du\right|$$

Or  $\forall z \in \mathbb{C}, z \times \bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$  donc :

$$\left|\int_a^b f(t) dt\right|^2 \leq \int_a^b |f(t)| dt \times \left|\int_a^b f(t) dt\right|$$

Enfin  $\left|\int_a^b f(t) dt\right| \geq 0$  donc :

$$\left|\int_a^b f(t) dt\right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \quad \square$$

### Caractérisation de la fonction nulle à l'aide d'une intégrale

Soient I un intervalle et  $f$  définie sur I et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Si  $f$  est continue sur I et si  $\int_1 |f(t)| dt = 0$  alors  $f$  est identiquement nulle sur I.

Démonstration : soit  $c \in I$ , on considère la fonction  $G : x \mapsto \int_c^x |f(t)| dt$ .

Puisque  $t \mapsto |f(t)|$  est continue sur I (composée de fonctions continues), le théorème fondamental de l'analyse assure que G est de classe  $C^1$  sur I et que :  $\forall x \in I, G'(x) = |f(x)|$  (1)

Soit  $x \in I \cap [c; +\infty[$ , puisque  $f$  est intégrable sur  $I$ ,  $\int_{\inf I}^c |f(t)| dt$  et  $\int_x^{\sup I} |f(t)| dt$  sont convergentes et la relation de Chasles assure que  $\int_I |f(t)| dt = \int_{\inf I}^c |f(t)| dt + \int_c^x |f(t)| dt + \int_x^{\sup I} |f(t)| dt$

De plus, la positivité de l'application  $f \mapsto \int_I f(t) dt$  assure que

$$\begin{cases} \int_{\inf I}^c |f(t)| dt \geq 0 \\ \int_c^x |f(t)| dt \geq 0 \\ \int_x^{\sup I} |f(t)| dt \geq 0 \end{cases}$$

Ainsi,  $\int_I |f(t)| dt = 0 \Rightarrow \forall x \in I \cap [c; +\infty[, \int_c^x |f(t)| dt = 0$

La fonction  $G : x \mapsto \int_c^x |f(t)| dt$  est donc constante sur l'intervalle  $I \cap [c; +\infty[$ , donc sa fonction dérivée est nulle sur l'intervalle  $I \cap [c; +\infty[$ . (2)

(1) et (2) permettent d'assurer que  $x \in I \cap [c; +\infty[, |f(x)| = 0$  donc  $f(x) = 0$ .

Ce raisonnement étant valide  $\forall c \in I$ , on a :  $\forall x \in I, f(x) = 0$ . □