Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

Les fonctions étudiées ici sont définies sur un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle...p.1
Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a;b[$ ou $[a;+\infty[$ (ou $]a;b]$ ou $]-\infty;b]$).
Extension à l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle ouvert $]a;b[$ ou $]-\infty;+\infty[$.
Relation de Chasles. Intégrales de référence.
Théorèmes de comparaison : majoration ou équivalence.
Théorème de changement de variables.
II. Intégrabilité d'une fonction continue sur un intervalle...p.9
Définition de l'intégrabilité d'une fonction continue sur un intervalle.
Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue et intégrable sur un intervalle : convergence de l'intégrale, linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire, caractérisation de la fonction nulle.

I. Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

La notion d'intégrale concerne pour l'instant les fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[a;b]$. Dans ce cas les méthodes des rectangles ou des trapèzes permettent d'obtenir une approximation numérique de la valeur de l'intégrale.

Exemples de codes python pour l'approximation numérique de $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$

```python
def carre(x):
    return x**2

def rectangles(f,a,b,n):
    dx=(b-a)/n
    s=0
    for k in range(n):
        s=s+f(a+k*dx)*dx
    return s

print(rectangles(carre,0,1,1000))
```

0.33283350000000034

```python
def carre(x):
    return x**2

def trapeze(f,a,b,n):
    dx=(b-a)/n
    s=f(a)/2*dx
    for k in range(1,n):
        s=s+f(a+k*dx)*dx
    s=s+f(b)/2*dx
    return s

print(trapeze(carre,0,1,1000))
```

0.33333350000000034

Utilisation de numpy ou de sympy :

```python
import numpy as np

x=np.arange(0,1,0.001)
y=[t**2 for t in x]
print(np.trapz(y,x))
```

0.3323344995

```python
from sympy import *
x=symbols('x')
pprint(integrate(x**2,(x,0,1)))
```

1/3

Exemple de code python utilisant le module sympy pour la recherche d'une primitive :

```python
1  from sympy import *
2  t = symbols('t')
3
4  pprint(integrate(ln(t),t))
5  pprint(integrate(1/t,t))
6  pprint(integrate(exp(t**2),t))
```

```
t·log(t) - t
log(t)

√π·erfi(t)
──────────
    2
```

Remarque : l'affichage résultant de l'exécution de la ligne 5 met en évidence une lacune...

Théorème fondamental de l'analyse appliqué au calcul d'une intégrale sur un intervalle fermé borné

Soient un intervalle $[a;b]$ et $f:[a;b]\to\mathrm{K}$.

Si f est continue sur $[a;b]$ alors f admet une primitive $\mathrm{F}:[a;b]\to\mathrm{K}$ et $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=[\mathrm{F}(t)]_a^b=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$

Cherchez l'erreur : $\int_{-1}^{1}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{t}\right]_{-1}^{1}=-\frac{1}{1}-\left(-\frac{1}{-1}\right)=-2$???

Démonstration : Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.

► Existence d'une primitive : en posant $\mathrm{F}:x\mapsto\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. Soient $x\in[a;b]$ et $h\in\mathbb{R}^*$ tel que $x+h\in[a;b]$ alors :

$$\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \quad\text{et}\quad \int_x^{x+h} f(x)\mathrm{d}t=h\,f(x)$$

donc $$\left|\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}-f(x)\right|=\left|\frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+h} f(x)\mathrm{d}t\right)\right|=\frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\mathrm{d}t\right|$$

Pour $h>0$, on a donc : $\left|\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|\leqslant\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt$

Pour $h<0$, on a donc : $\left|\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|\leqslant\dfrac{1}{-h}\displaystyle\int_{x+h}^{x}|f(t)-f(x)|\,dt=\dfrac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt$

Or f étant continue en x, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\eta>0$ tel que $|x-t|<\eta\Rightarrow|f(t)-f(x)|<\varepsilon$

Donc $\forall\varepsilon>0$, $\exists h\in\mathbb{R}^*$ tel que $\left|\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|\leqslant\dfrac{h}{h}\varepsilon=\varepsilon$

Ce qui signifie que $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$ donc $F'(x)=f(x)$

Ainsi F est une primitive de f sur $[a;b]$ et $F(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0$ ainsi on a bien : $\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$

► Résultat indépendant du choix d'une primitive car deux primitives de f sur $[a;b]$ diffèrent d'une constante.
Soient F et G deux primitives de f sur $[a;b]$, d'après l'inégalité des accroissements finis (le théorème des accroissements finis n'étant pas valide pour les fonctions à valeurs complexes) appliqué à la fonction $x\mapsto F(x)-G(x)$ dérivable sur $[a;b]$, donne $|F(b)-G(b)-(F(a)-G(a))|\leqslant\sup\limits_{c\in]a;b[}|F'(c)-G'(c)|\times|b-a|$

or $\forall c\in]a;b[$, $F'(c)-G'(c)=f(c)-f(c)=0$ donc $F(b)-G(b)=F(a)-G(a)$

Ainsi : $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$ □

L'objectif de ce cours est d'étendre cette notion pour définir les intégrales de fonctions continues sur un intervalle non fermé ou non borné : $[a;b[$ ou $[a;+\infty[$ puis $]a;b]$ ou $]-\infty;b]$ ou encore $]a;b[$.

Définition d'une intégrale généralisé sur un intervalle $[a;b[$ ou $[a;+\infty[$

Soient deux réels a et b tels que $a<b$ et f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

►si f est continue sur $[a;b[$ alors l'intégrale généralisée de f sur l'intervalle $[a;b[$ est définie par :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt\overset{\text{def}}{=}\lim_{\substack{T\to b\\T<b}}\int_a^T f(t)\,dt}$$

►si f est continue sur $[a;+\infty[$ alors l'intégrale généralisée de f sur l'intervalle $[a;+\infty[$ est définie par :

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\,dt\overset{\text{def}}{=}\lim_{T\to+\infty}\int_a^T f(t)\,dt}$$

Remarques : pour un intervalle $]a;b]$ on a $\int_a^b f(t)\,dt\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{\substack{T\to a\\T>a}}\int_T^b f(t)\,dt$ et pour $]-\infty;b]$, $\int_{-\infty}^b f(t)\,dt=\lim\limits_{T\to-\infty}\int_T^b f(t)\,dt$.

Si f est à valeur dans $\mathbb{C}$, la définition de l'intégrale donne pour $T\in[a;b[$:

$$\int_a^T f(t)\,dt=\int_a^T \mathrm{Re}(f(t))\,dt+i\int_a^T \mathrm{Im}(f(t))\,dt$$

Puis la définition des limites dans $\mathbb{C}$ donne : $\lim\limits_{\substack{T\to b\\T<b}}\int_a^T f(t)\,dt=\lim\limits_{\substack{T\to b\\T<b}}\int_a^T \mathrm{Re}(f(t))\,dt+i\lim\limits_{\substack{T\to b\\T<b}}\int_a^T \mathrm{Im}(f(t))\,dt$

Exemples : $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{t}}\,dt$, $\int_0^1\dfrac{1}{t}\,dt$ ou $\int_0^\pi\dfrac{\sin(t)}{t}\,dt$ sont des intégrales généralisées car...

$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{t}}\,dt$; $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t}\,dt$ et $\int_0^{+\infty}\sin(t)\,dt$ sont des intégrales généralisées car...

Cas des fonctions prolongeables par continuité

Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b[$.

Si f est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[a;b]$ alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est dite <u>faussement impropre</u> et en notant $\tilde{f}$ son prolongement on a : $\boxed{\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b \tilde{f}(t)\,dt}$

Démonstration : Soit $T\in[a;b[$, $\int_a^T f(t)\,dt-\int_a^b\tilde{f}(t)\,dt=\int_a^T f(t)\,dt-\left(\int_a^T\tilde{f}(t)\,dt+\int_T^b\tilde{f}(t)\,dt\right)=-\int_T^b\tilde{f}(t)\,dt$

Soit $\tilde{f}$ étant continue sur l'intervalle fermé borné $[a;b]$, il existe $M=\max\limits_{t\in[a;b]}|\tilde{f}(t)|$

$\left|\int_a^T f(t)\,dt-\int_a^b\tilde{f}(t)\,dt\right|=\left|\int_T^b\tilde{f}(t)\,dt\right|\leqslant M(b-T)$

Donc $\lim\limits_{\substack{T\to b\\T<b}}\left|\int_a^T f(t)\,dt-\int_a^b\tilde{f}(t)\,dt\right|=0$ d'où : $\lim\limits_{\substack{T\to b\\T<b}}\int_a^T f(t)\,dt=\int_a^b\tilde{f}(t)\,dt$ □

Définition de la convergence d'une intégrale généralisée

Soient deux réels a et b tels que $a<b$ et f une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

► si $I=[a;b[$ alors : l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si et seulement si elle est finie.

► si $I=[a;+\infty[$ alors : l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente si et seulement si elle est finie.

Une intégrale généralisée non convergente est dite divergente.

Remarque : on étend naturellement cette définition au cas d'un intervalle $]a;b]$ ou $]-\infty;b]$.

Exemples :

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$

$\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$

$\int_0^{+\infty} \sin(t)\,dt$

Exemple de code python utilisant les module numpy ou le module sympy pour calculer des intégrales généralisées :

```
import numpy as np
import scipy.integrate as integr

print(integr.quad(np.log,0,1))

def f(x):
    return 1/x**2

print(integr.quad(f,1,np.inf))
```

(-1.0000000000000004, 1.6653345369377348e-15)

(1.0, 1.1102230246251565e-14)

```
from sympy import *
t = symbols('t')

pprint(integrate(ln(t),(t,0,1)))
pprint(integrate(1/t**2,(t,1,+oo)))
```

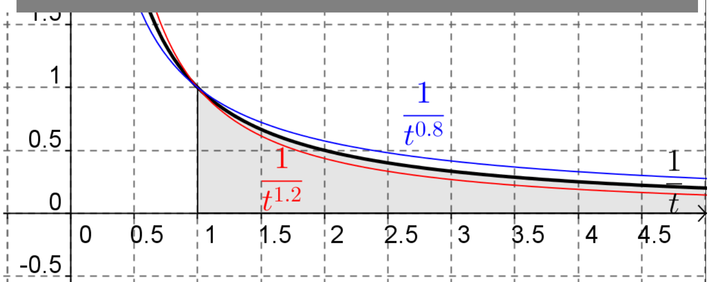
-1

1

Intégrales généralisées de référence : soit un réel α ...

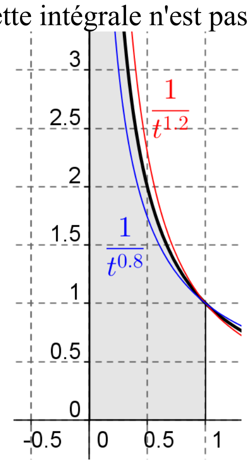
Critère de Riemann

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est convergente si et seulement si $\alpha>1$

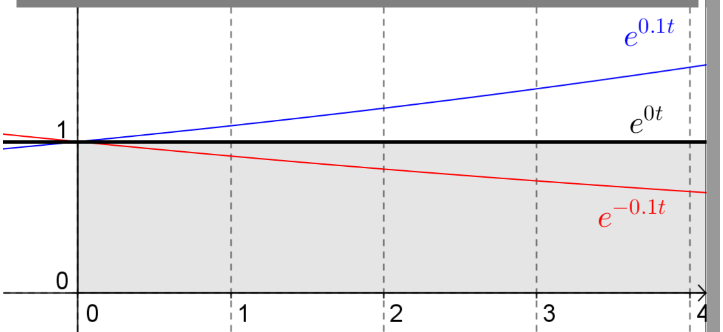


$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est convergente si et seulement si $\alpha<1$

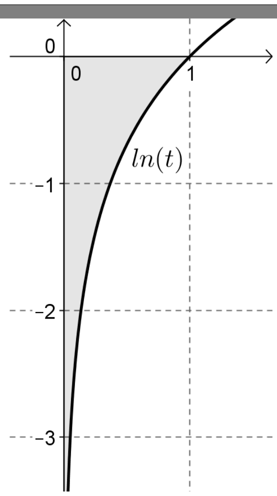
(si $\alpha\leqslant 0$ cette intégrale n'est pas généralisée)



$\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\,dt$ est convergente si et seulement si $\alpha<0$



$\int_0^1 \ln(t)\,dt$ est convergente



Démonstrations : soit $\varepsilon>0$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^{\alpha}}$ est continue sur l'intervalle $[\varepsilon;1]$ et :

$\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t=\ldots$

Donc …

Soit $\mathrm{T}>1$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^{\alpha}}$ est continue sur l'intervalle $[1;\mathrm{T}]$ et :

$\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{T}}\frac{1}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t=\ldots$

Donc...

Soit $\mathrm{T}>0$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, $t\mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$ est continue sur l'intervalle $[0;\mathrm{T}]$ et :

$\displaystyle\int_{0}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{d}t=\ldots$

Donc...

Soit $\varepsilon>0$, la fonction $t\mapsto\ln(t)$ est continue sur l'intervalle $[\varepsilon;1]$ et :

$\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1}\ln(t)\mathrm{d}t=\ldots$

Donc...

□

Définition de la convergence d'une intégrale sur un intervalle ouvert

Soient I un intervalle ouvert ($]a;b[$; $]a;+\infty[$, $]-\infty;b[$ ou $]-\infty;+\infty[$) et f une fonction continue sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\inf \mathrm{I}}^{\sup \mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si

il existe un réel $c\in\mathrm{I}$ tel que $\displaystyle\int_{\inf \mathrm{I}}^{c} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c}^{\sup \mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t$ soient convergentes.

⚠ En général, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t\neq\lim_{\mathrm{T}\to+\infty}\int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} f(t)\mathrm{d}t$. Exemple : $\forall\mathrm{T}\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} t\,\mathrm{d}t=\ldots$

Relation de Chasles pour les intégrales généralisées

Soient I un intervalle et f une fonction continue sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\inf \mathrm{I}}^{\sup \mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente alors $\forall c\in\mathrm{I}$, $\displaystyle\int_{\inf \mathrm{I}}^{c} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c}^{\sup \mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t$ sont convergentes

et : $\boxed{\displaystyle\int_{\inf \mathrm{I}}^{\sup \mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t=\int_{\inf \mathrm{I}}^{c} f(t)\mathrm{d}t+\int_{c}^{\sup \mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t}$

Exemple : soit $\alpha\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\begin{cases}\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t \text{ converge}\\ \displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t \text{ converge}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ldots\\ \ldots\end{cases}$

Conclusion : $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{t^{\alpha}}\mathrm{d}t$ ...

Démonstration : Par définition, si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\inf \mathrm{I}}^{\sup \mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente alors $\exists c\in\mathrm{I}$ tel que $\displaystyle\int_{\inf \mathrm{I}}^{c} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c}^{\sup \mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t$ soient convergentes et $\forall\mathrm{T}'\in\mathrm{I}\cap]-\infty;c[$ et $\forall\mathrm{T}\in\mathrm{I}\cap]c;+\infty[$, $\displaystyle\int_{\mathrm{T}'}^{c} f(t)\mathrm{d}t+\int_{c}^{\mathrm{T}} f(t)\mathrm{d}t=\int_{\mathrm{T}'}^{\mathrm{T}} f(t)\mathrm{d}t$

Ainsi, par passage à la limite : $\displaystyle\int_{\inf \mathrm{I}}^{\sup \mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t=\int_{\inf \mathrm{I}}^{c} f(t)\mathrm{d}t+\int_{c}^{\sup \mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t$

Soit $c'\in\mathrm{I}$, si $c'<c$ alors $\displaystyle\int_{\mathrm{T}'}^{c'} f(t)\mathrm{d}t+\int_{c'}^{c} f(t)\mathrm{d}t=\int_{\mathrm{T}'}^{c} f(t)\mathrm{d}t$ donc $\displaystyle\int_{\mathrm{T}'}^{c'} f(t)\mathrm{d}t=\int_{\mathrm{T}'}^{c} f(t)\mathrm{d}t-\int_{c'}^{c} f(t)\mathrm{d}t$

Donc, $\int_{\inf I}^{c} f(t)\,dt$ étant convergente, $\int_{\inf I}^{c'} f(t)\,dt$ est convergente.
De plus, $\int_{c'}^{T} f(t)\,dt=\int_{c'}^{c} f(t)\,dt+\int_{c}^{T} f(t)\,dt$ donc $\int_{T'}^{c'} f(t)\,dt+\int_{c'}^{T} f(t)\,dt=\int_{T'}^{T} f(t)\,dt$
Ainsi, par passage à la limite : $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)\,dt=\int_{\inf I}^{c'} f(t)\,dt+\int_{c'}^{\sup I} f(t)\,dt$.
Par un raisonnement analogue, on montre que l'égalité est valide si $c'>c$. □

⚠ Les résultats suivants s'appliquent aux fonctions positives sur un intervalle. Si f est négative sur I, il suffit d'étudier la convergence de l'intégrale $\int_{I} -f(t)\,dt$ pour pouvoir appliquer les théorèmes.

Théorème de comparaison des intégrandes positifs

Soient I un intervalle non fermé ou non borné, f et g deux fonctions continues et positives sur I, telles que : $\boxed{\forall t\in I, f(t)\leqslant g(t)}$.

Majoration de l'intégrande : si $\int_{\inf I}^{\sup I} g(t)\,dt$ converge alors $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)\,dt$ converge.

Minoration de l'intégrande : si $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)\,dt$ diverge alors $\int_{\inf I}^{\sup I} g(t)\,dt$ diverge.

Démonstration : Soit I un intervalle du type $[a;b[$ ou $[a;+\infty[$ et f et g deux fonctions continues et positives sur I.
La fonction $F:\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ T & \mapsto & \int_a^T f(t)\,dt\end{array}$ est croissante sur l'intervalle I donc le théorème de la limite monotone assure que :

$$\text{ou bien } \lim_{\substack{T\to\sup I\\ T\in I}} \int_a^T f(t)\,dt \text{ existe et est finie}$$

$$\text{ou bien } \lim_{\substack{T\to\sup I\\ T\in I}} \int_a^T f(t)\,dt=+\infty .$$

De plus $\lim_{\substack{T\to\sup I\\ T\in I}} \int_a^T f(t)\,dt$ existe et est finie si et seulement $\exists M\in\mathbb{R}$ tel que $\forall T\in I$, $\int_a^T f(t)\,dt\leqslant M$. i.e. F est majorée sur l'intervalle I.

Les mêmes arguments s'appliquent pour $G:\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ T & \mapsto & \int_a^T g(t)\,dt\end{array}$ et $\lim_{\substack{T\to\sup I\\ T\in I}} \int_a^T g(t)\,dt$.

Par ailleurs, si $\forall t\in I$, $f(t)\leqslant g(t)$ alors la croissance de l'intégrale assure que $\forall T\in I$, $\int_a^T f(t)\,dt\leqslant\int_a^T g(t)\,dt$.
► Si $\int_a^{\sup I} g(t)\,dt$ converge alors $\exists M\in\mathbb{R}$ tel que $\forall T\in I$, $\int_a^T g(t)\,dt\leqslant M$
Donc $\forall T\in I$, $\int_a^T f(t)\,dt\leqslant M$, ainsi le théorème de la limite monotone assure que $\int_a^{\sup I} f(t)\,dt$ converge.
► Si $\int_a^{\sup I} f(t)\,dt$ diverge alors le théorème de la limite monotone assure que $\lim_{\substack{T\to\sup I\\ T\in I}} \int_a^T f(t)\,dt=+\infty$

Donc le théorème de divergence par comparaison assure que $\lim_{\substack{T\to\sup I\\ T\in I}} \int_a^T g(t)\,dt=+\infty$ donc $\int_a^{\sup I} g(t)\,dt$ diverge.

Le cas d'un intervalle semi-ouvert du type $]-\infty;b]$ ou $]a;b]$ se traite de façon analogue en envisageant $\lim_{\substack{T\to\inf I\\ T\in I}} \int_T^b f(t)\,dt$ et $\lim_{\substack{T\to\inf I\\ T\in I}} \int_T^b g(t)\,dt$.
Le cas d'un intervalle ouvert $]-\infty;+\infty[$ ou $]a;b[$ se traite en introduisant $c\in I$ et en étudiant les intégrales généralisées $\int_{\inf I}^{c} f(t)\,dt$ et $\int_{c}^{\sup I} f(t)\,dt$. □

Exemple : Étudier la convergence des intégrales généralisées : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$

Remarque : la question de la convergence de l'intégrale généralisée repose sur des considérations locales ainsi :
pour $I=[a;b[$, une comparaison au voisinage de b est suffisante

pour $\mathrm{I}=]a;b]$, une comparaison au voisinage de a est suffisante
pour $\mathrm{I}=[a;+\infty[$, une comparaison pour les valeurs de t suffisamment grandes est suffisante.
pour $\mathrm{I}=]-\infty;b]$, une comparaison pour les valeurs de t suffisamment petites est suffisante.

Corollaire pour les intégrandes admettant une limite non nulle à l'infini

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;+\infty[$.
S'il existe $\mathrm{L}\in\mathbb{R}^*$ tel que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\mathrm{L}$ alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est grossièrement divergente.

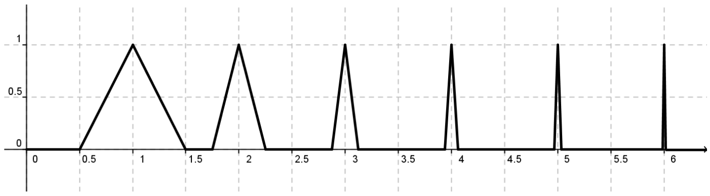
Démonstration : si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\mathrm{L}\neq 0$ alors pour $\varepsilon=\frac{\mathrm{L}}{2}$, il existe un réel $\mathrm{T}>a$ tel que $\forall x>\mathrm{T}$, $|f(x)-\mathrm{L}|<\varepsilon$ donc...

□

⚠ Si la fonction f admet une limite en $+\infty$, il est donc <u>nécessaire</u> que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ pour espérer la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ mais cette condition <u>n'est bien sûr pas suffisante</u> pour assurer la convergence de l'intégrale généralisée (cf intégrales de Riemann par exemple).

⚠ Si la fonction f n'admet pas de limite en $+\infty$ l'intégrale généralisée peut néanmoins être convergente.

Exemple : soit f la fonction affine par morceaux représentée ci-contre : la base d'un « triangle » centré sur un entier k étant de longueur $\frac{1}{2^k}$ et sa hauteur étant de 1,
$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=\ldots$



Théorème pour les intégrandes positifs équivalents

Soient I un intervalle semi-ouvert, f et g deux fonctions continues et positives sur I.

si $\mathrm{I}=[a;b[$ et $f\underset{b}{\sim}g$ alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
si $\mathrm{I}=]a;b]$ et $f\underset{a}{\sim}g$ alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
si $\mathrm{I}=[a;+\infty[$ et $f\underset{+\infty}{\sim}g$ alors les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
si $\mathrm{I}=]-\infty;b]$ et $f\underset{-\infty}{\sim}g$ alors les intégrales généralisées $\int_{-\infty}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Démonstration : si $\mathrm{I}=[a;b[$ et $f\underset{b}{\sim}g$ alors il existe $a'\in\mathrm{I}$ tel que : $\forall t\in]a';b[$, $f(t)=\alpha(t)\times g(t)$ et $\lim_{t\to b}\alpha(t)=1$
Donc il existe un intervalle $]a'';b[\subset]a';b[$ tel que $\forall t\in]a'';b[$, $|\alpha(t)-1|<0,1$ ...
Donc...

□

Remarque : si $f\underset{b}{\sim}g$ alors f et g ont le même signe au voisinage de b. Ainsi, si l'une des deux fonctions f ou g est strictement positive alors ce critère peut encore s'appliquer avec précaution :
En effet si $f\underset{b}{\sim}g$ et $\forall\in\mathrm{I}$, $g(t)>0$ alors $\lim_{t\to b}\frac{f(t)}{g(t)}=1$ donc il existe $\varepsilon>0$ tel que $\forall t\in[b-\varepsilon;b[$, $\frac{f(t)}{g(t)}>0$
ainsi, $\forall t\in[b-\varepsilon;b[$, $f(t)>0$.
Le critère d'équivalence précédent assure donc que les intégrales généralisées $\int_{b-\varepsilon}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{b-\varepsilon}^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Les intégrales $\int_a^{b-\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^{b-\varepsilon} g(t)\,\mathrm{d}t$ n'étant pas généralisées, les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont elles aussi de même nature.

Exemple : étude des intégrales généralisées : $\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{4\pi^2}\frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\,\mathrm{d}t$

Rappel : changement de variable dans une intégrale non généralisée

Soient deux réels $a<b$, φ une fonction de classe C^1 sur $[a;b]$, et f une fonction continue sur l'intervalle $\varphi([a;b])$ alors : $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt=\int_a^b f(\varphi(u))\times\varphi'(u)\,du$

Démonstration : d'après le théorème fondamental de l'analyse, il existe F primitive de f sur l'intervalle $\varphi([a;b])$
F étant de classe C^1 sur l'intervalle $\varphi([a;b])$, la fonction $F\circ\varphi$ est de classe C^1 sur $[a;b]$ et
$\forall u\in[a;b]$, $(F\circ\varphi)(u)=\varphi'(u)\times F'(\varphi(u))=\varphi'(u)\times f(\varphi(u))$
Ainsi, $\int_a^b f(\varphi(u))\times\varphi\,du=[F\circ\varphi]_{u=a}^{u=b}=F(\varphi(b))-F(\varphi(a))=[F(t)]_{t=\varphi(a)}^{t=\varphi(b)}=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$

⚠ L'intervalle $\varphi([a;b])$ n'est pas nécessairement $[\varphi(a);\varphi(b)]$ ni $[\varphi(b);\varphi(a)]$
Exemple : $\sin([0;2\pi])=\ldots$

Théorème de changement de variables pour les intégrales généralisées

Soient f une fonction continue sur un intervalle $]a;b[$ avec $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$,
et φ une fonction strictement croissante et de classe C^1 sur un intervalle $]\alpha;\beta[$ avec $\alpha\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $\beta\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

telle que $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{u\to\alpha\\u\in]\alpha;\beta[}}\varphi(u)=a\\ \lim\limits_{\substack{u\to\beta\\u\in]\alpha;\beta[}}\varphi(u)=b\end{cases}$

i.e φ réalise une bijection croissante de $]\alpha;\beta[$ dans $]a;b[$ de classe C^1 : $\begin{array}{ccc}]a;b[& \to &]\alpha;\beta[\\ t & \mapsto & \varphi^{-1}(t)=u \\ t=\varphi(u) & \leftarrow & u\end{array}$

Alors $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\times\varphi'(u)\,du$ sont de même nature.

Si $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente alors : $\int_a^b f(t)\,dt=\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\times\varphi'(u)\,du$.

$$\boxed{\int_{\lim\limits_{\substack{u\to\alpha\\u\in]\alpha;\beta[}}\varphi(u)}^{\lim\limits_{\substack{u\to\beta\\u\in]\alpha;\beta[}}\varphi(u)} f(t)\,dt=\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du}$$
ou avec I un intervalle $\boxed{\int_{\varphi(I)} f(t)\,dt=\int_I f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du}$

Démonstration :
f étant continue sur $]a;b[$, il existe une fonction F de classe C^1 sur $]a;b[$ telle que : $\forall t\in]a;b[$, $F'(t)=f(t)$.

φ étant strictement croissante sur $]\alpha;\beta[$ et telle que $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{u\to\alpha\\u\in]\alpha;\beta[}}\varphi(u)=a\\ \lim\limits_{\substack{u\to\beta\\u\in]\alpha;\beta[}}\varphi(u)=b\end{cases}$, on a :

u	α		β
φ	a	$\nearrow$	b

Ainsi, $\forall u\in]\alpha;\beta[$, $\varphi(u)\in]a;b[$ et on peut considérer la composition : $\begin{array}{ccccc}]\alpha;\beta[& \xrightarrow{\varphi} &]a;b[& \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \\ u & \mapsto & \varphi(u) & \mapsto & F(\varphi(u))\end{array}$

Soit la fonction $G=F\circ\varphi$, par composition de fonctions de classe C^1 , la fonction G est de classe C^1 sur $]\alpha;\beta[$ et
$$\forall u\in]\alpha;\beta[\ ,\ G'(u)=F'(\varphi(u))\times\varphi'(u)=f(\varphi(u))\times\varphi'(u)$$
Soit $\gamma\in]\alpha;\beta[$, on étudie la nature des intégrales généralisées $\int_\alpha^\gamma f(\varphi(u))\times\varphi'(u)\,du$ et $\int_\gamma^\beta f(\varphi(u))\times\varphi'(u)\,du$
Soit $\alpha'\in]\alpha;\gamma[$, $\int_{\alpha'}^\gamma f(\varphi(u))\times\varphi'(u)\,du=[G(u)]_{u=\alpha'}^{u=\gamma}=F(\varphi(\gamma))-F(\varphi(\alpha'))$
Or $\varphi(\alpha')\in]a;b[$, $\lim\limits_{\substack{\alpha'\to\alpha\\\alpha'\in]\alpha;\beta[}}\varphi(\alpha')=a$ et F étant continue sur $]a;b[$ on a : $\lim\limits_{\substack{\alpha'\to\alpha\\\alpha'\in]\alpha;\beta[}}F(\varphi(\alpha'))=\lim\limits_{\substack{T\to a\\T\in]a;b[}}F(T)$
Ainsi $\int_\alpha^\gamma f(\varphi(u))\times\varphi'(u)\,du$ est convergente $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{T\to a\\T\in]a;b[}}F(T)$ existe et est finie $\Leftrightarrow$ $\int_a^{\varphi(\gamma)} f(t)\,dt$ est convergente.

De plus si $\lim\limits_{\substack{T\to a\\T\in]a;b[}}F(T)$ existe et est finie alors $\int_\alpha^\gamma f(\varphi(u))\times\varphi'(u)\,du=\int_a^{\varphi(\gamma)} f(t)\,dt$

De même : $\int_\gamma^\beta f(\varphi(u))\times\varphi'(u)\,du$ est convergente $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{T\to b\\T\in]a;b[}}F(T)$ existe et est finie $\Leftrightarrow$ $\int_{\varphi(\gamma)}^b f(t)\,dt$ est convergente.

De plus si $\lim\limits_{\substack{T \to b \\ T\in]a;b[}} F(T)$ existe et est finie alors $\int_{\gamma}^{\beta} f(\varphi(u))\times\varphi'(u)\,\mathrm{d}u=\int_{\varphi(\gamma)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$.

La relation de Chasles permet de conclure pour $\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\times\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$. □

Remarques : $f(t)\in\mathbb{C}$, $f(\varphi(u))\in\mathbb{C}$ mais $\varphi(u)\in\mathbb{R}$ et $\varphi'(u)\in\mathbb{R}$.

$$\begin{tikzcd} u \arrow[rr, mapsto, "f\circ\varphi"] \arrow[ddr, mapsto, "\varphi"'] & & f(\varphi(u))=f(t) \\ ]\alpha;\beta[& & \mathbb{C} \\ & \varphi(u)=t \arrow[uur, mapsto, "f"'] & \\ &]a;b[& \end{tikzcd}$$

On note souvent $t=\varphi(u)$, $\varphi(]\alpha;\beta[)=\varphi(]a;b[)$ et $\mathrm{d}t=\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$

Exemples : $\int_{0}^{\pi^2}\frac{\cos(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=\ldots$

Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, étudier la nature de $\int_{a}^{a+1}\frac{1}{(t-a)^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ ...

⚠ Un changement de variable peut transformer une intégrale simple en intégrale généralisée.

Exemple : $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2+\cos(t)}\,\mathrm{d}t$ en posant $u=\tan\frac{t}{2}$ …

Adaptation au cas ou φ est strictement décroissante

Soient f une fonction continue sur un intervalle $]a;b[$ avec $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$,
et φ une fonction strictement décroissante et de classe C^1 sur un intervalle $]\alpha;\beta[$ avec $\alpha\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $\beta\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

telle que $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{u\to\alpha\\ u\in]\alpha;\beta[}}\varphi(u)=b\\ \lim\limits_{\substack{u\to\beta\\ u\in]\alpha;\beta[}}\varphi(u)=a\end{cases}$.

i.e φ réalise une bijection décroissante de $]\alpha;\beta[$ dans $]a;b[$ de classe C^1 : $\begin{array}{ccc}]a:b[& \to &]\alpha;\beta[\\ t & \mapsto & \varphi^{-1}(t)=u \\ t=\varphi(u) & \leftarrow\!\shortmid & u \end{array}$

Alors $\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\times|\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u$ sont de même nature.

Si $\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente alors : $\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\times|\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u$.

$\boxed{\int_{\lim\limits_{\substack{u\to\beta\\ u\in]\alpha;\beta[}}\varphi(u)}^{\lim\limits_{\substack{u\to\alpha\\ u\in]\alpha;\beta[}}\varphi(u)} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))|\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u}$ ou avec I un intervalle $\boxed{\int_{\varphi(I)} f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_{I} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u}$

Démonstration :

φ étant strictement décroissante sur $]\alpha;\beta[$ et telle que $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{u\to\alpha\\ u\in]\alpha;\beta[}}\varphi(u)=b\\ \lim\limits_{\substack{u\to\beta\\ u\in]\alpha;\beta[}}\varphi(u)=a\end{cases}$,

u	α		β
φ	b	$\searrow$	a

La démonstration est analogue à la précédente et on utilise le fait que pour
$[a';b']\subset I$, $\int_{b'}^{a'} f(t)\,\mathrm{d}t=F(b')-F(a')=-\int_{a'}^{b'} f(t)\,\mathrm{d}t$ puis des passages à la limite. □

Remarque : dans les deux cas, la stricte monotonie de φ assure que $\varphi(]\alpha;\beta[)=]a;b[$ et donc que $f\circ\varphi$ soit définie sur $]\alpha;\beta[$ car φ est définie sur $]a;b[$.

II. Intégrabilité d'une fonction continue sur un intervalle

Il s'agit d'étendre les propriétés des intégrales de fonctions continues sur un intervalle fermé borné au cas de certaines intégrales généralisées convergentes.

Définition de l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle quelconque

Soient I un intervalle et f une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
La fonction f est dite intégrable sur I si et seulement si
$\int_{\inf \mathrm{I}}^{\sup \mathrm{I}} |f(t)| \mathrm{d}t$ n'est pas une intégrale généralisée ou est une intégrale généralisée convergente.

Remarques : si $\int_{\inf \mathrm{I}}^{\sup \mathrm{I}} |f(t)| \mathrm{d}t$ est convergente l'intégrale $\int_{\inf \mathrm{I}}^{\sup \mathrm{I}} f(t) \mathrm{d}t$ est dite « absolument convergente ».

Exemples : La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0;1]$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0;1]$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$.

⚠ Il faut éviter les confusions classiques :
« Intégrable sur intervalle I » n'est pas le contraire de « dérivable sur un intervalle I ».
« Intégrable sur un intervalle I » ne signifie pas « admet une primitive sur un intervalle I »

L'intégrabilité d'une fonction sur intervalle ne dépend pas de l'inclusion ou non des bornes de l'intervalle

Soit I un intervalle et f une fonction continue sur I, valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
f est intégrable sur I si et seulement si f est intégrable sur l'intervalle $]\inf \mathrm{I};\sup \mathrm{I}[$

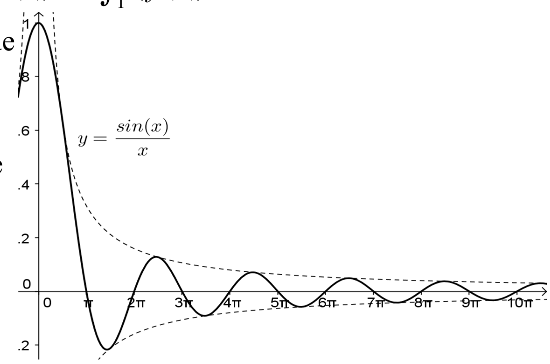
Remarque : cette propriétés est triviale si I est un intervalle ouvert.

Convergence de l'intégrale d'une fonction intégrable

Soient I un intervalle et f une fonction continue sur I, valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si f est intégrable sur I alors $\int_{\inf \mathrm{I}}^{\sup \mathrm{I}} f(t) \mathrm{d}t$ est convergente et est notée $\int_{\mathrm{I}} f(t) \mathrm{d}t$.

Idée de démonstration : soit $\mathrm{I}^+ = \{t \in \mathrm{I} | f(t) \geqslant 0\}$ et $\mathrm{I}^- = \{t \in \mathrm{I} | f(t) < 0\}$ on montre que si f est intégrable sur I alors $\int_{\mathrm{I}^+} |f(t)| \mathrm{d}t$ et $\int_{\mathrm{I}^-} |f(t)| \mathrm{d}t$ sont convergentes et $\int_{\mathrm{I}} f(t) \mathrm{d}t = \int_{\mathrm{I}^+} |f(t)| \mathrm{d}t - \int_{\mathrm{I}^-} |f(t)| \mathrm{d}t$. □

⚠ La réciproque de ce théorème n'est pas valide. Il est possible que $\int_{\mathrm{I}} f(t) \mathrm{d}t$ soit convergente mais que $\int_{\mathrm{I}} |f(t)| \mathrm{d}t$ soit divergente.
Les intégrales généralisées convergentes mais non absolument convergentes sont dites semi-convergentes. Par exemple, l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$ est convergente et vaut $\dfrac{\pi}{2}$ mais n'est pas absolument convergente. L'étude de ce type de convergence n'est pas un objectif du programme de TSI.



Cas d'un intégrande borné sur intervalle borné

Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $]a;b[$.
Si la fonction f est bornée sur l'intervalle $]a;b[$ alors $\int_a^b f(t) \mathrm{d}t$ est convergente.

Démonstration : si f est bornée sur l'intervalle $]a;b[$ alors il existe un réel $\mathrm{M}>0$ tel que $\forall t \in]a;b[$, $|f(t)| \leqslant \mathrm{M}$
Or la fonction $t \mapsto \mathrm{M}$ est intégrable sur $]a;b[$, ainsi le théorème de majoration appliqué à la fonction $t \mapsto |f(t)|$ à valeurs positives assure que $\int_a^b |f(t)| \mathrm{d}t$ est convergente donc f est intégrable sur $]a;b[$ ainsi $\int_a^b f(t) \mathrm{d}t$ est convergente. □

Exemple : $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ est...

Remarque : en particulier, si la fonction f admet des limites finies à droite du réel a et à gauche du réel b alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Propriété de linéarité de l'application $f \mapsto \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$

Soient I un intervalle, f et g deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Homogénéité : Si f est intégrable sur I alors la fonction λf est intégrable sur I et $\boxed{\int_I \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\,\mathrm{d}t}$

Additivité : Si f et g sont intégrables sur I alors la fonction $f+g$ est intégrable sur I et

$$\boxed{\int_I f(t)+g(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \int_I g(t)\,\mathrm{d}t}$$

Démonstration : par extension des propriétés sur les intégrales à l'aide de passages à la limite. □

Cherchez l'erreur :???? $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$?????

Structure de l'ensemble de fonctions intégrables sur un intervalle

Soit I un intervalle.

L'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I à valeurs dans K= $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un sous-espace vectoriel de $C^0(I;K)$ noté $C^0(I;K) \cap L^1(I)$ (notation hors programme).

$$\begin{array}{ccc} C^0(I;K)\cap L^1(I) & \to & K \\ f & \mapsto & \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$ est une application linéaire.

Démonstration : découle de la linéarité des intégrales généralisées. □

⚠ En général, le produit de deux fonctions intégrables sur un intervalle I n'est pas intégrable sur l'intervalle I.

Contre-exemple : la fonction $t \to \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur l'intervalle $]0;1]$ mais la fonction $t \to \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{\sqrt{t}}$ n'est pas intégrable sur l'intervalle $]0;1]$

Méthode : Intégrabilité du produit d'une fonction intégrable par une fonction bornée

Soit I un intervalle quelconque,
f une fonction continue sur I et intégrable sur l'intervalle I
et g une fonction continue et <u>bornée sur l'intervalle I</u>
alors on peut démontrer que la fonction $f \times g$ est intégrable sur l'intervalle I.

Démonstration : par produit, la fonction $f \times g$ est continue sur l'intervalle I, de plus en notant $M = \sup_I |g|$, on a :

$\forall t \in I$, $|f(t) \times g(t)| = |f(t)| \times |g(t)| \leqslant M|f(t)|$ or f étant intégrable sur I, $t \mapsto M|f(t)|$ est intégrable sur I, ainsi le théorème de majoration par une fonction intégrable assure que $\int_I |f(t) \times g(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente donc $f \times g$ est intégrable sur I. □

<u>Rappels</u> : deux résultats utiles pour prouver qu'une fonction est majorée sans avoir à déterminer son majorant.

► Une fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée et atteint ses bornes.
► Une fonction continue sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert et admettant des limites finies au bord de cet intervalle est bornée sur cet intervalle.

Démonstration pour un intervalle $[a;+\infty[$:
Soit $\lim_{t\to+\infty} f(t) = l$ alors pour $\varepsilon = 1$ par exemple, $\exists M > 0$ tel que $x \geqslant M \Rightarrow l-1 < f(x) < l+1$
De plus f étant continue sur l'intervalle fermé borné $[a;M]$, f est bornée et atteint ses bornes sur $[a;M]$.
Conclusion f est bornée sur $[a;+\infty[$. □
Exemples d'application :
► Nature de $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ pour $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ ...

La fonction $t\mapsto \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.

En effet, en notant $\mathrm{P}(t)=\alpha_n t^n+\alpha_{n-1}t^{n-1}+\ldots+\alpha_0$, on a : $|\mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-t}|\underset{+\infty}{\approx}|\alpha_n|t^n\mathrm{e}^{-t}=|\alpha_n|(t^{n+2}\mathrm{e}^{-t})\frac{1}{t^2}$

Or la fonction $t\mapsto t^{n+2}\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et, en vertu des croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{n+2}\mathrm{e}^{-t}=0$ donc la fonction $t\mapsto t^{n+2}\mathrm{e}^{-t}$ est bornée sur $[1;\infty[$.

De plus, d'après le critère de Riemann, la fonction $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.

Donc, la fonction $t\mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ et d'après le critère d'équivalence pour les fonctions positives, la fonction $t\mapsto \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.

► Nature de $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ …

Positivité et croissance de l'application $f\mapsto\int_{\mathrm{I}}f(t)\mathrm{d}t$

Soient I un intervalle, f et g deux fonctions continues et intégrables sur I à valeurs réelles.

$$\text{Si } \forall t\in\mathrm{I}\ ,\ f(t)\geqslant 0 \text{ alors } \int_{\mathrm{I}}f(t)\mathrm{d}t\geqslant 0$$

$$\text{Si } \forall t\in\mathrm{I}\ ,\ f(t)\geqslant g(t) \text{ alors } \int_{\mathrm{I}}f(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_{\mathrm{I}}g(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration : par extension des propriétés sur les intégrales à l'aide de passages à la limite. □

Inégalité triangulaire pour les intégrales généralisées

Soient I un intervalle quelconque et f une fonction continue et intégrable sur I.

$$\left|\int_{\mathrm{I}}f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_{\mathrm{I}}|f(t)|\mathrm{d}t$$

⚠ Si f est à valeurs réelles $|f(t)|$ et $\left|\int_{\mathrm{I}}f(t)\mathrm{d}t\right|$ sont les valeurs absolues des réels $f(t)$ et $\int_{\mathrm{I}}f(t)\mathrm{d}t$

Si f est à valeurs complexes $|f(t)|$ et $\left|\int_{\mathrm{I}}f(t)\mathrm{d}t\right|$ sont les modules des complexes $f(t)$ et $\int_{\mathrm{I}}f(t)\mathrm{d}t$

Démonstration : passage à la limite dans l'inégalité triangulaire pour les fonctions continues sur un intervalle fermé borné.

Rappel : démonstration de l'inégalité triangulaire pour $f\in\mathrm{C}^0([a;b];\mathbb{R})$

$\forall t\in[a;b]\ ,\ -|f(t)|\leqslant f(t)\leqslant|f(t)|\ \Rightarrow\ \ldots$

Démonstration de l'inégalité triangulaire pour $f\in\mathrm{C}^0([a;b];\mathbb{C})$

La partie réelle d'un nombre complexe est majorée par le module de ce nombre complexe, $\forall z\in\mathbb{C}\ ,\ \mathrm{Re}(z)\leqslant|z|$ donc :

$$\forall t\in[a;b]\ ,\ \mathrm{Re}\left(f(t)\times\overline{\int_a^b f(u)\mathrm{d}u}\right)\leqslant\left|f(t)\times\overline{\int_a^b f(u)\mathrm{d}u}\right|=|f(t)|\times\left|\int_a^b f(u)\mathrm{d}u\right|$$

Par croissance de l'intégrale pour les fonctions à valeurs réelles :

$$\int_a^b\mathrm{Re}\left(f(t)\times\overline{\int_a^b f(u)\mathrm{d}u}\right)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b|f(t)|\times\left|\int_a^b f(u)\mathrm{d}u\right|\mathrm{d}t$$

Par définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes on a :

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\times\overline{\int_a^b f(u)\mathrm{d}u}\right)\leqslant\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t\times\left|\int_a^b f(u)\mathrm{d}u\right|$$

Or $\forall z\in\mathbb{C}\ ,\ z\times\overline{z}=|z|^2\in\mathbb{R}$ donc : $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|^2\leqslant\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t\times\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|$

Enfin $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|\geqslant 0$ donc : $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t$ □

Caractérisation de la fonction nulle à l'aide d'une intégrale

Soient I un intervalle et f définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$\text{Si } f \text{ est continue sur I et si } \int_{\mathrm{I}}|f(t)|\mathrm{d}t=0 \text{ alors } f \text{ est identiquement nulle sur I.}$$

Démonstration : soit $c\in\mathrm{I}$, on considère la fonction $\mathrm{G}:x\mapsto\int_c^x|f(t)|\mathrm{d}t$.

Puisque $t\mapsto|f(t)|$ est continue sur I (composée de fonctions continues), le théorème fondamental de l'analyse assure que

G est de classe C^1 sur I et que : $\forall x \in \mathrm{I}$, $\mathrm{G}'(x) = |f(x)|$ (1)

Soit $x \in \mathrm{I} \cap [c\,;+\infty[$, puisque f est intégrable sur I, $\int_{\inf \mathrm{I}}^{c} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ et $\int_{x}^{\sup \mathrm{I}} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ sont convergentes et la relation de Chasles assure que $\int_{\mathrm{I}} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{\inf \mathrm{I}}^{c} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{c}^{x} |f(t)| + \int_{x}^{\sup \mathrm{I}} |f(t)|\,\mathrm{d}t$

De plus, la positivité de l'application $f \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t$ assure que $\begin{cases} \int_{\inf \mathrm{I}}^{c} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \\ \int_{c}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \\ \int_{x}^{\sup \mathrm{I}} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \end{cases}$

Ainsi, $\int_{\mathrm{I}} |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \forall\ x \in \mathrm{I} \cap [c\,;+\infty[$, $\int_{c}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$

La fonction $\mathrm{G} : x \mapsto \int_{c}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est donc constante sur l'intervalle $\mathrm{I} \cap [c\,;+\infty[$, donc sa fonction dérivée est nulle sur l'intervalle $\mathrm{I} \cap [c\,;+\infty[$. (2)

(1) et (2) permettent d'assurer que $x \in \mathrm{I} \cap [c\,;+\infty[$, $|f(x)| = 0$ donc $f(x) = 0$.

Ce raisonnement étant valide $\forall c \in \mathrm{I}$, on a : $\forall x \in \mathrm{I}$, $f(x) = 0$. □