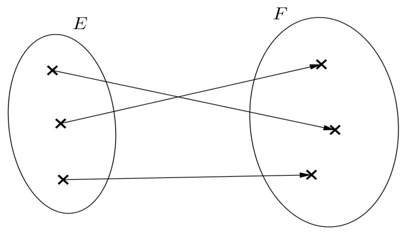
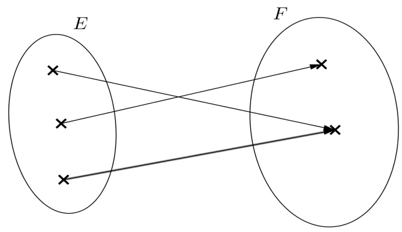
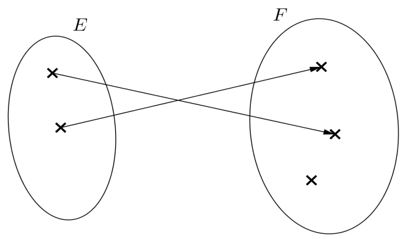
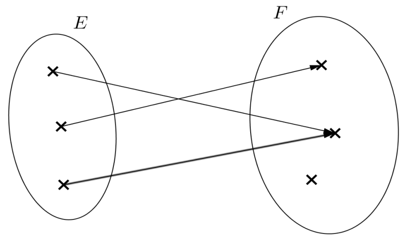
Injectif et/ou surjectif

<u>Définitions</u> : soient E et F deux ensembles et une application $f:\mathrm{E}\rightarrow\mathrm{F}$.
On note $f(\mathrm{E})\overset{\text{déf}}{=}\{f(x) \mid x\in\mathrm{E}\}=\{y\in\mathrm{F} \mid \exists x\in\mathrm{E}, \text{tel que } f(x)=y\}$ le sous-ensemble de F.

	f est injective $\Leftrightarrow$ tout élément de F admet au plus un antécédent dans E par f $\Leftrightarrow$ $\forall(x,x')\in\mathrm{E}^2$, $f(x)=f(x')\Rightarrow x=x'$	f n'est pas injective $\Leftrightarrow$ il existe (au moins) un élément de F admettant au moins deux antécédents $\Leftrightarrow$ $\exists(x,x')\in\mathrm{E}^2$,tel que $\begin{cases} x\neq x' \\ f(x)=f(x')\end{cases}$
f est surjective $\Leftrightarrow$ tout élément de F admet (au moins) un antécédent dans E par f $\Leftrightarrow$ $\forall y\in\mathrm{F}$, $\exists x\in\mathrm{E}$ tel que $f(x)=y$ $\Leftrightarrow$ $f(\mathrm{E})=\mathrm{F}$	Soit $y_0\in\mathrm{F}$, l'équation $f(x)=y_0$ a une unique solution dans E. f est une bijection de E dans F	Soit $y_0\in\mathrm{F}$, l'équation $f(x)=y_0$ a au moins une solution dans E.
f n'est pas surjective $\Leftrightarrow$ il existe (au moins) un élément de F n'admettant pas d'antécédent dans E par f $\Leftrightarrow$ $\exists y\in\mathrm{F}$ tel que $\forall x\in\mathrm{E}$, $f(x)\neq y$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{F}\setminus f(\mathrm{E})\neq\emptyset$	Soit $y_0\in\mathrm{F}$, l'équation $f(x)=y_0$ a une unique solution si $y_0\in f(\mathrm{E})$ ou aucune solution si $y_0\notin f(\mathrm{E})$. f est une bijection de E dans $f(\mathrm{E})$	Soit $y_0\in\mathrm{F}$, l'équation $f(x)=y_0$ a au moins une solution si $y_0\in f(\mathrm{E})$ ou aucune solution si $y_0\notin f(\mathrm{E})$.

<u>Cas des ensembles de cardinaux finis</u> : soient E et F deux ensembles finis et une application $f:\mathrm{E}\rightarrow\mathrm{F}$.

	Si f est injective	Si f n'est pas injective
Si f est surjective	...alors Card(E)=Card(F)  	...alors Card(E)>Card(F) 
Si f n'est pas surjective	...alors Card(E)<Card(F)  	

<u>Cas des applications linéaires</u> : soient E et F deux espaces vectoriels et une application linéaire $f:\mathrm{E}\rightarrow\mathrm{F}$. $\mathrm{Im}(f)\overset{\text{déf}}{=}f(\mathrm{E})$

	f est injective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\, f=\{0_{\mathrm{E}}\}$ $\Leftrightarrow$ $0\notin sp(f)$	f n'est pas injective $\Leftrightarrow$ $\exists u\in\mathrm{E}$ tel que $\begin{cases} u\neq 0_{\mathrm{E}} \\ f(u)=0_{\mathrm{F}}\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $0\in sp(f)$
f est surjective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{F}$	f est un isomorphisme de E dans F	Soit $v_0\in\mathrm{F}$, $\exists u_0\in\mathrm{E}$ tel que $f(u_0)=v_0$ et $f(u)=v_0\Leftrightarrow u-u_0\in\mathrm{Ker}\, f$
f n'est pas surjective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{F}\setminus\mathrm{Im}(f)\neq\emptyset$	f est un isomorphisme de E dans Im(*f*)	Soit $v_0\in\mathrm{F}$, l'équation $f(u)=v_0$ admet une infinité de solutions (sous-espace affine) ou aucune solution

<u>Cas des applications linéaires sur des espaces vectoriels de dimension finie</u> : soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et une application linéaire $f:\mathrm{E}\rightarrow\mathrm{F}$. Le théorème du rang assure : $dim(\mathrm{E})=dim(\mathrm{Ker}(f))+rg(f)$
Soit $\mathrm{B}=(\mathrm{e}_1;\ldots\mathrm{e}_n)$ une base de E alors $\mathrm{Im}(f)=Vect(f(\mathrm{e}_1),\ldots,f(\mathrm{e}_n))$ donc $rg(f)=dim(\mathrm{Im}(f))=rg(f(\mathrm{e}_1),\ldots,f(\mathrm{e}_n))$

	f est injective $\Leftrightarrow$ $rg(f)=dim(\mathrm{E})$ $\Leftrightarrow$ la famille $(f(\mathrm{e}_1),\ldots,f(\mathrm{e}_n))$ est libre	f n'est pas injective $\Leftrightarrow$ $rg(f)<dim(\mathrm{E})$ $\Leftrightarrow$ la famille $(f(\mathrm{e}_1),\ldots,f(\mathrm{e}_n))$ est liée
f est surjective $\Leftrightarrow$ $rg(f)=dim(\mathrm{F})$ $\Leftrightarrow$ la famille $(f(\mathrm{e}_1),\ldots,f(\mathrm{e}_n))$ est génératrice de F	$dim(\mathrm{E})=rg(f)=dim(\mathrm{F})$	$dim(\mathrm{E})>rg(f)=dim(\mathrm{F})$
f n'est pas surjective $\Leftrightarrow$ $rg(f)<dim(\mathrm{F})$ $\Leftrightarrow$ la famille $(f(\mathrm{e}_1),\ldots,f(\mathrm{e}_n))$ n'est pas génératrice de F	$dim(\mathrm{E})=rg(f)<dim(\mathrm{F})$	$\begin{cases} rg(f)<dim(\mathrm{E}) \\ rg(f)<dim(\mathrm{F})\end{cases}$